التمرين الأول :(3 نقط)

نذكر أن $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ حلقة واحدية غير تبادلية.

نعتبر المجموعة : $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix} / \ x\in\mathbb{R}\right\}$

0.5 1) بين أن E جزء مستقر في $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0.5 2) أ- بين أن التطبيق φ الذي يربط العدد الحقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\times)$.

0.5 ب- استنتج أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية.

0.5 ج- حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x عدد حقيقي.

0.5 د- حل في المجموعة E المعادلة : $A^5X=B$ حيث : $A=M(2)$ و $B=M(12)$ و $A^5=\underbrace{A\times A\times....\times A}_{5\ \text{مـــرات}}$

0.5 3) بين أن المجموعة : $F=\left\{M(\ln(x)) / \ x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E,\times)$.

التمرين الثاني :(4 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$ (E)

0.5 أ- تحقق أن العدد العقدي $a=1+i(2-\sqrt{3})$ حل للمعادلة (E)

0.5 ب- استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E)

0.5 2) أ - بين أن : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

0.75 ب- اكتب العدد a على الشكل المثلثي.

3) نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$

لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$

0.5 أ - حدد ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ)

0.5 ب - بين أن النقطتين O و C تنتميان للدائرة (Γ)

0.75 ج- بين أن العدد العقدي $\dfrac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف.

التمرين الثالث :(3 نقط)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .

نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كرة بيضاء ثم نوقف التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة.

0.5 | ب- احسب احتمال الحدث $[X=1]$

0.5 | ج- بين أن : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0.5 | د- احسب احتمال الحدث $[X=3]$

0.5 | 2) أ- بين أن: $E(X)=\dfrac{13}{11}$. (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X)

0.75 | ب- احسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$.(حيث $V(X)$ هي مغايرة المتغير العشوائي X)

مسألة:(10 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} \quad ; \quad 0\le x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0.5 | 1) بين أن الدالة f متصلة على اليسار في 1

0.5 | 2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في 1

0.75 | 3) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم أعط جدول تغيراتها.

0.5 | 4)أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\dfrac{e-1}{e}$

0.75 | ب- أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0 . (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$)

0.5 | 5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق: $f(\alpha)=\alpha$

0.25 | 6) أ- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I .

0.5 | ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل عنصر x من المجال I .

II- نضع : $I_0=\int_0^1 f(t)dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $I_n=\int_0^1 t^n f(t)dt$

0.75 | 1) بين أن المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

0.75 | 2) بين أن : $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1} \quad (\forall n\ge0)$ ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n\ge0}$.

III- لكل عدد حقيقي x من المجال $J=[0,1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$F_0(x)=\int_0^x f(t)dt \text{ و } F_n(x)=\int_0^x t^n f(t)dt \text{ و } F(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}dt \text{ و } S_n(x)=\sum_{k=0}^{k=n} F_k(x)$$

1 | 1) بين أن: $F(x)-S_n(x)=\int_0^x \dfrac{t^{n+1}f(t)}{(1-t)}dt \quad (\forall x\in J) \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

0.5	2) أ- بين أن الدالة : $x \to (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعا على المجال J
0.5	ب- استنتج أن الدالة : $t \to \dfrac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعا على المجال $[0,x]$ مهما يكن x من المجال J
1	3) أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ (\forall x \in J) : \quad 0 \le F(x) - S_n(x) \le \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$
0.5	ب- استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = F(x)$
0.5	4) أ- حدد $F(x)$ من أجل $x \in J$
0.25	ب- حدد النهاية: $\lim\limits_{x\to1^-} F(x)$