

1(I) ■

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $[1; +\infty[$

إذن :  $x \geq 1$  و  $y \geq 1$

ومنه :  $\sqrt{x} \geq 1$  و  $\sqrt{y} \geq 1$

يعني :  $(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2 \geq 1$

إذن :  $x \perp y \in [1; +\infty[$

و بالتالي :  $\perp$  قانون تركيب داخلي في  $I$ .

2(I) ■

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $[1; +\infty[$

لدينا :  $x \perp y = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)^2$

$$\Leftrightarrow x \perp y = (\sqrt{y} + \sqrt{x} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x \perp y = y \perp x$$

ومنه  $\perp$  قانون تبادلي في  $I$ .

ليكن  $x$  و  $y$  و  $z$  ثلاثة عناصر من المجال  $I$ .

لدينا :  $(x \perp y) \perp z = (\sqrt{x \perp y} + \sqrt{z} - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 + \sqrt{z} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + (\sqrt{y} + \sqrt{z} - 1) - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = (\sqrt{x} + \sqrt{y \perp z} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$$

إذن  $\perp$  قانون تجميعي في  $[1; +\infty[$ .

3(I) ■

ليكن  $e$  العنصر المحايد للقانون  $\perp$  في  $I$ .

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; x \perp e = e \perp x = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; (\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) ; \sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \pm \sqrt{x}$$

في حالة :  $\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = -\sqrt{x}$

نحصل على :  $e = (1 - 2\sqrt{x})^2$

لكن :  $(1 - 2\sqrt{x})^2 \notin I$  لأنه لدينا  $x \in I$

إذن :  $x \geq 0$  و منه :  $(1 - 2\sqrt{x})^2 < 1$

أما في حالة :  $\sqrt{x} + \sqrt{e} - 1 = \sqrt{x}$

نحصل على :  $e = 1 \in [1; +\infty[$

و نعلم أن العنصر المحايد إن وجد يكون دائما وحيدا

إذن : 1 هو العنصر المحايد للقانون  $\perp$  في المجموعة  $I$ .

1(II) ■

لتكن  $M(a)$  و  $M(b)$  مصفوفتين من  $E$

$$M(a) \times M(b) = \begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2(b-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ لدينا :}$$

$$= \begin{pmatrix} ab & 2(ab-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M(ab) \in E$$

إذن  $E$  جزء مستقر من  $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

1(II) 2(i) ■

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $\mathbb{R}^*$

لدينا :

$$\varphi(x \times y) = M(xy) = M(x) \times M(y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$$

إذن  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$

ليكن  $M(y)$  عنصرا من  $(E, \times)$

لنحل المعادلة  $\varphi(x) = M(y)$  ذات المجهول  $x$

$$\varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow M(x) = M(y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 2(y-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

و بالتالي : المعادلة  $\varphi(x) = M(y)$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}^*$  و هو  $y$

و بتعبير آخر :

$$(\forall M(y) \in E) (\exists! x \in \mathbb{R}^*) : \varphi(x) = M(y)$$

ومنه :  $\varphi$  تقابل من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$

خلاصة :  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$ .

2(II) 2(b) ■

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة .

نستنتج إذن بنية  $(E, \times)$  انطلاقا من بنية  $(\mathbb{R}^*, \times)$

عن طريق التشاكل التقابلي  $\varphi$ .

**لدينا** :  $(\mathbb{R}^*, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو العدد الحقيقي 1 و كل عنصر  $x$  يقبل  $\frac{1}{x}$  كممثل.

**إن** :  $(E, \times)$  زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة  $\varphi(1)$  و كل مصفوفة  $M(x)$  تقبل مائلة و هي المصفوفة  $M\left(\frac{1}{x}\right)$ .

$$\varphi(1) = M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{و لدينا :}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 2\left(\frac{1}{x}-1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

### ⒸⒶ(II) ■

لتكن  $H_n$  مصفوفة من المجموعة  $\mathcal{H}$

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2(2^n-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow H_n = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad x = 2^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} \quad \text{و لدينا :} \quad \mathcal{H} \subset E$$

إن  $\mathcal{H}$  جزء غير فارغ من  $E$

لتكن :  $\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  مصفوفتين من  $\mathcal{H}$

$$\begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^m & 2^{m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^{-m} & 2(2^{-m}-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n-m} & 2^{n-m+1}-2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$$

**إن** :  $(\mathcal{H}, \times)$  زمرة جزئية من  $(E, \times)$ .

### التمرين الثاني : (3,5 ن)

### ⒶⒶ(I) ■

تعويض مباشر و حساب سهل

### ⒶⒶ(I) ■

نعلم أنه إذا كان  $z_1$  و  $z_2$  هما حلا المعادلة :  $az^2 + bz + c = 0$

$$\text{فإن : } z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{نستعمل العلاقة : } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{إن : } z_1 z_2 = \left(\frac{5}{3} + 4i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{\left(\frac{5}{3} + 4i\right)\left(1 - \frac{2}{3}i\right)}{\left(1 + \frac{2}{3}i\right)\left(1 - \frac{2}{3}i\right)}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \frac{9}{13} \left(\frac{13}{3} + \frac{26}{9}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3 \left(1 + \frac{2}{3}i\right)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = 3z_1$$

### ⒶⒶ(II) ■

لدينا :  $P = r(A)$

إن حسب الكتابة العقدية للدوران :  $(z_P - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_A - z_\Omega)$

$$\Leftrightarrow (p - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p = e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega) + \omega} \quad (1)$$

و بنفس الطريقة :  $B = r(Q)$

$$\Leftrightarrow (z_B - z_\Omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_Q - z_\Omega)$$

$$\Leftrightarrow (b - \omega) = e^{\frac{i\pi}{3}}(q - \omega)$$

$$\Leftrightarrow qe^{\frac{i\pi}{3}} = (b - \omega) + \omega e^{\frac{i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q = e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega) + \omega} \quad (2)$$

### ⒶⒶ(II) ■

في البداية لدينا :

$$\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

■ (II) 2 (i)

$$\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{نفترض أن :}$$

بالاستعانة بالعلاقة (3) نحصل على :

$$\frac{p - a}{q - b} = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p - a}{q - b} = e^{\frac{2i\pi}{3}} \times e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{2i\pi} = 1$$

إذن :  $(p - a) = (q - b)$

يعني :  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BQ}$

ومن هنا حسب التعريف المتجهي لمتوازي الأضلاع :  $APBQ$  متوازي أضلاع.

■ (II) 2 (b)

لدينا حسب النتيجة (1) :

$$(p - a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a) \quad (4)$$

و لدينا كذلك حسب افتراض السؤال (2) :  $\left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

$$(5) \quad (\omega - b) = e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a) \quad \text{إذن :}$$

و لدينا من جهة أخرى :

$$(b - a) = (\omega - a) - (\omega - b)$$

إذن باستعمال العلاقة (5) نحصل على :

$$(b - a) = (\omega - a) - (\omega - b)$$

$$\Leftrightarrow (b - a) = (\omega - a) - e^{-\frac{2i\pi}{3}} (\omega - a)$$

$$\Leftrightarrow (b - a) = (\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \quad (6)$$

من (4) و (6) نستنتج أن :

$$\frac{b - a}{p - a} = \frac{(\omega - a) \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)}{\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a)} = \frac{1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - a}{p - a} = \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b - a}{p - a} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(e^{-\frac{4i\pi}{3}} - e^{-i\pi}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)} \quad \text{ننتقل إذن من الكتابة :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(\cos\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-4\pi}{3}\right) + 1\right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{\frac{4i\pi}{3}} \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1\right)}{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

■ (II) 1 (c)

لدينا حسب العلاقتين (1) و (2) من السؤال (1) :

$$(p - a) = \omega + ae^{\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{\frac{i\pi}{3}} - a$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \omega \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) + a \left(e^{\frac{i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (p - a) = \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a)$$

و لدينا كذلك :  $(q - b) = \omega + be^{-\frac{i\pi}{3}} - \omega e^{-\frac{i\pi}{3}} - b$

$$\Leftrightarrow (q - b) = \omega \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) + b \left(e^{-\frac{i\pi}{3}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (q - b) = \left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - b)$$

$$\frac{p - a}{q - b} = \frac{\left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - a)}{\left(1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) (\omega - b)} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{ومن هنا :}$$

$$(3) \quad \frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{\frac{4i\pi}{3}} \quad \text{و بالتالي :}$$

بما أن  $49 \wedge 6 = 1$  فإنه حسب *Gauss* نحصل على :  $49 / (y - 8)$

ومنه :  $y = 49k + 8$  ;  $(\exists k \in \mathbb{Z})$

نعوض  $y$  بقيمته في المعادلة (\*) نحصل على :

$$49(x - 1) = 6(49k)$$

$$\Leftrightarrow x = 6k + 1$$

عكسيا : لدينا :  $49(6k + 1) - 6(49k + 8) = 1$

و بالتالي : مجموعة حلول المعادلة تكتب على شكل :

$$S = \{ (6k + 1 ; 49k + 8) / k \in \mathbb{Z} \}$$

■ (3) أ

نعلم أنه إذا كانت  $q^n$  متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الغير المنعدم  $q$  فإن :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

لدينا  $7^n$  متتالية هندسية أساسها 7 إذن :

$$1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007} = \frac{7^{2007+1} - 1}{7 - 1}$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{7^{2008} - 1}{6}$$

$$\Leftrightarrow 7^{2008} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 7^2 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

$$\Leftrightarrow 49 \cdot 7^{2006} - 6N = 1$$

إذن الزوج  $(7^{2006}, N)$  حل للمعادلة (E) .

■ (3) ب

$$\begin{cases} 1 \equiv 1[4] \\ 7 \equiv -1[4] \end{cases} \text{ لدينا :}$$

$$\begin{cases} 7^2 \equiv 1[4] \\ 7^3 \equiv -1[4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^4 \equiv 1[4] \\ 7^5 \equiv -1[4] \end{cases}$$

⋮ ⋮

$$\begin{cases} 7^{2006} \equiv 1[4] \\ 7^{2007} \equiv -1[4] \end{cases}$$

نضرب طرفي آخر نتيجة في العدد العقدي  $(1 + i\sqrt{3})$  نحصل على :

$$\Leftrightarrow \frac{b - a}{p - a} = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = i\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{b - a}{p - a}\right) = i\sqrt{3} \text{ و بالتالي :}$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) = \arg(i\sqrt{3})[2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \overline{(\overline{AP}, \overline{AB})} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \widehat{PAB} \text{ زاوية قائمة}$$

و بما أن  $APQB$  متوازي أضلاع و إحدى زواياه قائمة.

فإن  $APQB$  مستطيل.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ (1) أ

لدينا الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر من 503 هي : 2 و 3 و 5 و 7 و 11 و 13 و 17 و 19 و لا أحد من هذه الأعداد يقسم العدد 503 .

إذن 503 عدد أولي.

■ (1) ب

بما أن 503 عدد أولي و 7 عدد أولي كذلك.

$$\text{فإنه حسب (Fermat) : } 7^{503-1} \equiv 1[503]$$

$$\text{يعني : } 7^{502} \equiv 1[503]$$

$$\text{و منه : } (7^{502})^4 \equiv 1^4[503]$$

$$\text{أي : } 7^{2008} \equiv 1[503]$$

■ (2)

لدينا : (1,8) حل خاص للمعادلة (E) .

و ليكن  $(x, y)$  الحل العام للمعادلة (E) .

$$\text{إذن : } \begin{cases} 49 \times 1 - 6 \times 8 = 1 \\ 49x - 6y = 1 \end{cases}$$

ننجز عملية الفرق بين المعادلتين طرفا بطرف نحصل على :

$$49(x - 1) = 6(y - 8) \quad (*)$$

$$\Rightarrow 49 / 6(y - 8)$$

نجمع هذه المتوافقات طرفا بطرف نحصل على :

$$1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2006} + 7^{2007} \equiv 0[4]$$

$$\Leftrightarrow N \equiv 0[4]$$

لدينا حسب ① ب)  $7^{2008} \equiv 1[503]$  إذن :  $503 / (7^{2008} - 1)$

و نعلم أن :  $(7^{2008} - 1) = 6N$  إذن :  $503 / 6N$

و بما أن 503 عدد أولي و  $3 \times 2$  هو التفكيك الأولي للعدد 6 فإن :  $503 \wedge 6 = 1$

و منه حسب (Gauss) :  $503 / N$

$$N \equiv 0[503] \text{ و بالتالي :}$$

③ ③

لدينا :  $503 \wedge 4 = 1$  لأن : 503 عدد أولي.

و لأن  $2^2$  هو التفكيك الأولي للعدد 4

و نعلم أن :  $4 / N$  و  $503 / N$

إذن :  $4 \times 503 / N$  يعني :  $2012 / N$

التمرين الرابع : (5, 7 ن)

① ①

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left( \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} \right) \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

إذن :  $g'$  تتعدم في 0 و إشارتها موجبة على المجال  $[0, +\infty[$ .

و منه  $g$  دالة تزايدية على المجال  $[0, +\infty[$ .

② ①

ليكن  $x$  عنصرا من  $[0, +\infty[$ .

إذن  $x \geq 0$  و منه :  $g(x) \geq g(0) = 0$

و بالتالي :  $\forall x \in [0, +\infty[ ; g(x) \geq 0$

① ②

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}$$

نضع :  $t = e^{-x}$  نحصل على :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - \ln(1+0)}{t-0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (\ln(e^x + 1) - \ln(e^x))$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x + 1) - x e^x = 0$$

$$\begin{matrix} \infty & \infty & \infty \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ 0^+ & 0^+ & 0^- \end{matrix}$$

② ②

ليكن  $x$  عددا حقيقيا .

$$f'(x) = e^x \ln(1 + e^{-x}) + e^x \left( \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x \left( \ln(1 + e^{-x}) - \left( \frac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \right)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = e^x g(e^{-x})$$

③ ②

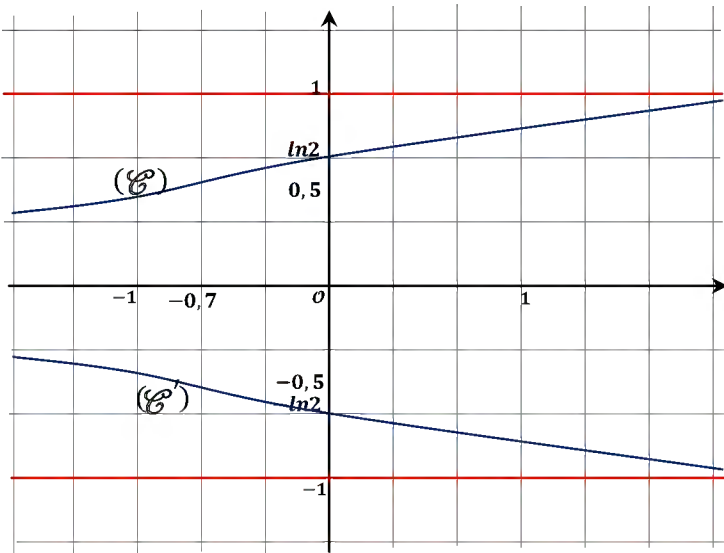
لدينا :  $f'(x) = e^x g(e^{-x})$

إذن  $f'$  لا تتعدم أبدا و إشارتها موجبة دائما .

و نستنتج جدول تغيرات  $f$  كما يلي :

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f$     | 0         | 1         |

④ ②



⑤ ②

ليكن  $x$  عنصرا من  $]-1, 0[$ .

إذن :  $-1 < x < 0$  و منه  $e^{-x} < e$  و  $e^x < 1$

يعني :  $g(e^{-x}) < g(e)$  و  $e^x < 1$

إذن :  $0 < e^x g(e^{-x}) < g(e)$  أي :  $0 < f'(x) < g(e)$

6(II) ■

$$h(x) = f(x) + x \quad \text{نضع :}$$

$$h'(x) = f'(x) + 1 \quad \text{لدينا :}$$

بما أن :  $f'(x) > 0$  حسب السؤال (5)

فإن :  $h'(x) > 1 > 0$  ومنه :  $h$  دالة تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

ومنه :  $h$  تقابل من أي مجال  $[x, y]$  من  $\mathbb{R}$  نحو صورته بالدالة  $h$ .

نختار المجال  $[-1, 0]$ .

إذن  $h$  تقابل من  $[-1, 0]$  نحو  $f([-1, 0])$

$$h([-1, 0]) = [h(-1), h(0)] \approx \left[-\frac{1}{2}, \ln 2\right] \quad \text{ولدينا :}$$

$$0 \in \left[-\frac{1}{2}, \ln 2\right] \quad \text{وبما أن :}$$

فإن الصفر يمتلك سابقاً واحداً بالتقابل  $h$  في المجال  $[-1, 0]$ .

و بتعبير آخر :  $\exists! \alpha \in [-1, 0] ; h(\alpha) = 0$

$$\text{و بما أن : } h(-1) \neq h(0) \neq 0$$

فإن :  $\exists! \alpha \in ]-1, 0[ ; h(\alpha) = 0$

أي :  $\exists! \alpha \in ]-1, 0[ ; f(\alpha) + \alpha = 0$

7(II) ■

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $-1 \leq u_0 = 0 \leq 0$

نفترض أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

حسب التمثيل المبياني للدالة  $f$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) \geq 0$

(1)

إذن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) \geq 0$

ولدينا حسب الافتراض :  $u_n \leq 0$

إذن :  $f(u_n) \leq \ln 2$  لأن  $f$  تزايدية على  $\mathbb{R}$ .

ومنه :  $f(u_n) \leq 1$  لأن :  $\ln 2 \approx 0,6$

(2)

من (1) و (2) نستنتج أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq f(u_n) \leq 1$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq -f(u_n) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_{n+1} \leq 0$$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$

7(II) ■

لدينا  $f$  دالة متصلة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  كله.

نستطيع إذن تطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على أي مجال من  $\mathbb{R}$

نختار المجال الذي طرفاه  $u_n$  و  $\alpha$  و الذي سنرمز له بالرمز  $[\alpha, u_n]$

لأننا لا ندري من الأكبر هل  $u_n$  أم  $\alpha$ .

$$\Rightarrow \exists c \in [\alpha, u_n] ; \frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha} = f'(c)$$

$$\Rightarrow \exists c \in [\alpha, u_n] ; |f(u_n) - f(\alpha)| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \exists c \in [\alpha, u_n] ; |-u_{n+1} + \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

$$\Rightarrow \exists c \in [\alpha, u_n] ; |u_{n+1} - \alpha| = f'(c)|u_n - \alpha|$$

بما أن :  $0 \leq f'(x) \leq g(e)$

فإن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq f'(x)|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

ومنه :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$

7(II) ■

لدينا حسب السؤال (ب) :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$$

من أجل  $(n - 1)$  نحصل على :

$$|u_n - \alpha| \leq g(e)|u_{n-1} - \alpha|$$

$$\leq (g(e))^2 |u_{n-2} - \alpha|$$

$$\leq (g(e))^3 |u_{n-3} - \alpha|$$

⋮ ⋮

$$\leq (g(e))^n |u_{n-n} - \alpha|$$

إذن :  $|u_n - \alpha| \leq (g(e))^n |0 - \alpha|$

و بما أن :  $\alpha \in ]-1, 0[$  و ذلك حسب (6)

فإن :  $|0 - \alpha| = |\alpha| < 1$

و بالتالي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$



لدينا حسب السؤال (7) ع

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$$

و نلاحظ أن  $(g(e))^n$  متتالية هندسية أساسها  $g(e)$  و هو عدد

موجب أصغر من 1

$$g(e) < 0,6 < 1 \quad \text{لأن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (g(e))^n = 0 \quad \text{إذن}$$

و منه حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha \quad \text{أي}$$

**التمرين الخامس : (2,5 ن)**

1 ■

$$F(1) = \int_1^1 \left( \frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt = 0$$

2 (i) ■

لدينا الدالة  $t \rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2}$  متصلة على  $]0, +\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية  $\psi$  على  $]0, +\infty[$  بحيث :

$$\psi'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \quad \text{و} \quad \psi(x) - \psi(0) = \int_0^x \left( \frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

$$F(x) = \psi(x) - \psi\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{بما أن}$$

فإن  $F$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  لأنها مجموع دالة و مركب

دالتين قابلتين للإشتقاق على  $]0, +\infty[$

$$F'(x) = \psi'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' \psi'\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{و لدينا}$$

$$= \left( \frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left( \frac{-1}{x^2} \right) \left( \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right)$$

$$= \left( \frac{\ln x}{1+x^2} \right) - \left( \frac{\ln x}{1+x^2} \right) = 0$$

2 (b) ■

بما أن  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F'(x) = 0$

فإن  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F(x) = c \in \mathbb{R}$

و بما أن  $F(1) = 0$  فإن  $c = 0$

و بالتالي  $(\forall x \in ]0, +\infty[) ; F(x) = 0$

3 ■

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt = 0$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left( \frac{1}{1+t^2} \right) (\ln t) dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \left[ (\text{Arctan}(t))(\ln t) \right]_{\frac{1}{x}}^x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \ln(x) \cdot \text{Arctan}(x) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \left( \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt \quad (*)$$

4 ■

نعتبر الدالة العددية  $\varphi$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :

$$\varphi(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x)$$

لدينا  $\varphi$  قابلة للإشتقاق على كل من المجالين  $]0, +\infty[$  و  $]-\infty, 0[$

لأنها تضم دوال اعتيادية كلها معرفة و قابلة للإشتقاق على

$]0, +\infty[$  و  $]-\infty, 0[$

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \left( \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \right) + \left( \frac{1}{1+x^2} \right) \quad \text{و لدينا}$$

$$= \left( \frac{-1}{x^2} \right) \left( \frac{x^2}{1+x^2} \right) + \left( \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$= \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

إذن  $\varphi$  دالة ثابتة على كل من المجالين  $]0, +\infty[$  و  $]-\infty, 0[$

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty, 0[ ; \varphi(x) = c_1 \in \mathbb{R} \\ \forall x \in ]0, +\infty[ ; \varphi(x) = c_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{أو بتعبير آخر :}$$

نعوض  $x$  بالقيمتين 1 و -1 و ذلك من أجل إيجاد  $c_1$  و  $c_2$  نحصل على :

$$\begin{cases} c_1 = \varphi(-1) = 2\text{Arctan}(-1) = 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} \\ c_2 = \varphi(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} ; \forall x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} ; \forall x < 0 \end{cases} \quad \text{و بالتالي :}$$

ما يهمنا من هذه النتيجة هو :  $(\forall x > 0) ; \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x > 0) ; \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x) \quad (**)$$

■ 4

نستغل إذن النتيجةين (\*) و (\*\*) في الإجابة على هذا السؤال.

$$\text{لدينا : } (\forall x > 0) ; F(x) = 0$$

إذن :

$$\left(\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt = \ln x$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■