

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

## الدورة الاستدراكية 2014

### الموضوع

RS 24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⵔ ⵏ ⵓⵎⵓⵏⵏ  
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⵔ ⵏ ⵓⵎⵓⵏⵏ  
ⵏ ⵓⵎⵓⵏⵏ ⵏ ⵓⵎⵓⵏⵏ



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنىات الجبرية.....(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل.....(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

[www.9alami.info](http://www.9alami.info)

**التمرين الأول: (2 ن)**

نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .  
يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W. إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين.

- 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟ 0.25  
2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟ 0.75  
3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.  
حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X 1

**التمرين الثاني: (1 ن)**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

$$\text{نضع: } b_n = 2 \cdot 10^n + 1 \text{ و } c_n = 2 \cdot 10^n - 1$$

- 1- بين أن:  $c_n \neq c_n$  ظ  $b_n$  ثم استنتج أن  $b_n$  و  $c_n$  أوليان فيما بينهما. 0.5

(b ظ a هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

- 2- أوجد زوجا  $(x_n, y_n)$  من  $\mathbb{Z}^2$  يحقق:  $b_n x_n + c_n y_n = 1$  0.5

**التمرين الثالث: (3,75 ن)**

$$\text{نضع } J = ]-1, 1[$$

1- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع:  $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$

- 1- تحقق أن:  $1 + ab > 0$  ("  $J^2$  خ (a,b) ") ثم استنتج أن \* قانون تركيب داخلي في J 0.75

2- (أ) بين أن القانون \* تبادلي و تجميعي. 0.5

(ب) بين أن  $(J, *)$  يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.25

(ج) بين أن  $(J, *)$  زمرة تبادلية. 0.5

// - نعتبر التطبيق f المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

1- بين أن الدالة f تقابل من  $\mathbb{R}$  نحو J 0.75

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع:  $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

بين أن f تشاكل من  $(\mathbb{R}, \times)$  نحو  $(J, \perp)$  حيث:  $J^* = J - \{0\}$  0.5

3- نذكر أن  $(\mathbb{R}, \times)$  زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون  $\perp$  توزيعي بالنسبة للقانون \* في J .

بين أن  $(J, *, \perp)$  جسم تبادلي. 0.5

**التمرين الرابع: (3.25 ن)**

1- I حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 + i = 0$  (a يرمز لحل المعادلة بحيث:  $\text{Re}(a) > 0$ ) 0.5

2- (أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي  $1 + a$  0.5

(ب) استنتج أن:  $\cos \frac{p}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$  0.25

(ج) تحقق أن:  $(1 + a)(1 - a) = 1 + i$  ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد  $1 - a$  0.5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O, u, v)$  ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $M$  و  $M'$  التي أحاقها على التوالي هي  $a$  و  $-a$  و  $z$  و  $z'$  و نفترض أن:  $zz' + i = 0$

1- لتكن  $N$  النقطة التي لحقها  $\bar{z}$  مرافق  $z$

بين أن المستقيمين  $(ON)$  و  $(OM')$  متعامدان. 0.25

2- (أ) بين أن :  $z' - a = i \frac{z - a}{az}$  0.25

(ب) بين أنه إذا كان  $z^1 - a$  فإن  $z'^1 - a$  و  $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$  0.5

3- نفترض أن النقط  $A$  و  $B$  و  $M$  غير مستقيمية.

بين أن النقطة  $M'$  تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABM$  0.5

### التمرين الخامس: (7.5 نقط)

I- لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, i, j)$  بحيث:  $\|i\| = 1 \text{ cm}$

1- أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب  $f'(x)$  ثم استنتج تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0, +\infty[$  0.75

3- لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  نعتبر الدالة العددية  $g_n$  المعرفة على  $]0, 1[$  بما يلي:  $g_n(x) = f(x) - x^n$

(أ) بين أن الدالة  $g_n$  تناقصية قطعاً على المجال  $]0, 1[$  0.25

(ب) استنتج أنه لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  ، يوجد عدد حقيقي وحيد  $\alpha_n$  من المجال  $]0, 1[$  بحيث:  $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$  0.5

(ج) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:  $g_n(a_{n+1}) < 0$  0.5

(د) بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(أ) تحقق أن  $0 < a_1 \leq 1 \leq a_2$  0.25

(ب) تحقق أن:  $h(a_n) = n$  ("  $x \in \mathbb{N}^*$  ") حيث:  $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$  0.25

(ج) بين أن:  $l = 1$  0.5

(د) استنتج أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$  0.25

II - (أ) أدرس إشارة التكامل  $\int_x^1 f(x) dx$  لكل  $x$  من  $\mathbb{N}^*$  ، 0.25

(ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن:  $\int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$  ("  $x \in \mathbb{N}^*$  ") 0.5

(ج) أستنتج بالوحدة  $\text{cm}^2$  مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى  $(C)$  و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي: 0.25

$$y = 0 \text{ و } x = e^2 \text{ و } x = 1$$

$$2- \text{ لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين  $n$  و  $k$  بحيث  $n \geq 2$  و  $1 \leq k \leq n-1$  لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(ب) بين أن :  $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$  ("  $n \times \mathbb{R}^*$  ")

(ج) استنتج أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$

**التمرين السادس (2.5 نقط)**

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي:  $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$

1- لكل  $x$  من ، نضع :  $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

(أ) تحقق أنه لكل  $x$  من المجال  $[0, +\infty[$  لدينا:  $g(x) = -k(\sqrt{x})$

(ب) بين أن الدالة  $g$  متصلة على  $[0, +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$

(ج) احسب  $g'(x)$  لكل  $x$  من  $]0, +\infty[$  ثم استنتج أن الدالة  $g$  تناقصية قطعاً على المجال  $[0, +\infty[$

2- (أ) بين أن:  $\frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$  ( $\forall x \in ]0, +\infty[$ )

(ب) استنتج أن الدالة  $g$  غير قابلة للاشتقاق على اليمين في  $0$  و أعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.

انتهى