

التمرين الأول

$$U(2N, 2B); V(2N, 2B); W(1N, 2B)$$

(1) الاحتمال لكي يتم السحب من الصندوق U

لكي يتم السحب من الصندوق U يجب أن نسحب كرة بيضاء من الصندوق W و هذا الاحتمال هو: $\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}$$

(2) احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة:

يتحقق الحدث إذا و فقط إذا سحبنا كرة بيضاء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيضاوين من $U(2N, 3B)$

أو سحبنا كرة سوداء من $W(1N, 2B)$ و كرتين بيضاوين من $V(3N, 2B)$

$$\text{إذن احتمال هذا الحدث هو: } \frac{2}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{2 \times 3 + 1}{3 \times 10} = \frac{7}{30}$$

$$\frac{7}{30}$$

(3) قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

$$p((X=1)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{18}{30} \quad \text{و} \quad p((X=0)) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_5^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{5}{30}$$

$$p((X=2)) = \frac{7}{30} \quad (\text{2 لدينا حسب السؤال})$$

ومنه قانون احتمال المتغير العشوائي X مقدم في الجدول التالي:

k	0	1	2
$p((X=k))$	$\frac{5}{30}$	$\frac{18}{30}$	$\frac{7}{30}$

التمرين الثاني

$$(\forall n \in \mathbb{N}); c_n = 2 \cdot 10^n - 1 \quad \text{و} \quad b_n = 2 \cdot 10^n + 1$$

(1) لدينا $b_n \wedge c_n = c_n \wedge (b_n - c_n) = c_n \wedge 2$ و بما أن c_n عدد فردي فإن $c_n \wedge 2 = 1$ إذن $b_n \wedge c_n = 1$

نستنتج أن c_n و b_n أوليان في ما بينهما

$$b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$$

(2) بما أن $b_n \wedge c_n = 1$ فإن حسب مبرهنة بوزو يوجد (x_n, y_n) من \mathbb{N}^2 بحيث $b_n x_n + c_n y_n = 1$

نحدد x_n و y_n باستعمال خوارزمية أقليدس:

$$\begin{cases} b_n = c_n + 2 \\ c_n = 2(10^n - 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c_n - 2(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1) \Rightarrow 1 = c_n 10^n + (1 - 10^n) b_n$$

نستنتج أن

$$y_n = 10^n \quad \text{و} \quad x_n = 1 - 10^n$$

Ammarimaths

التمرين الثالث

$$\forall (a, b) \in]-1, 1[; a * b = \frac{a+b}{1+ab} \quad I$$

$$(1) \text{ لدينا: } \begin{cases} -1 < a < 1 \\ -1 < b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| < 1 \\ |b| < 1 \end{cases} \Rightarrow |ab| < 1 \Rightarrow -1 < ab < 1 \Rightarrow 0 < 1+ab < 2$$

إذن

$$\forall (a, b) \in]-1, 1[; 1+ab > 0$$

$$a * b - 1 = \frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab} < 0 \text{ لدينا}$$

$$a * b + 1 = \frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} = \frac{(a+1)(1+b)}{1+ab} > 0 \text{ و}$$

نستنتج أن $-1 < a * b < 1$ و منه $a * b \in J$ و بالتالي:*** قانون داخلي في J**

(2) أ) لنبين أن القانون * تبادلي و تجميعي

$$\text{لدينا } (\forall (x, y) \in J^2); x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx} = y * x \text{ تبادلي}$$

$$\text{و لدينا } (\forall (x, y, z) \in J^3); (x * y) * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

$$\text{و } x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x+xyz+y+z}{1+yz+xy+xz}$$

إذن $(\forall (x, y, z) \in J^3); (x * y) * z = x * (y * z)$ و منه القانون * تجميعي**القانون * تبادلي و تجميعي**

(ب) تحديد العنصر المحايد

لنحدد e من J بحيث $(\forall x \in J); x * e = x$

$$(\forall x \in J); x * e = x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe} = x \stackrel{(1+xe>0)}{\Leftrightarrow} x+e = x+x^2e \Leftrightarrow (1-x^2)e = 0$$

و بما أن $x \in]-1, 1[$ فإن $1-x^2 \neq 0$ و منه $e = 0$ و $0 \in J$ القانون * تبادلي إذن $(\forall x \in J); x * 0 = 0 * x = x$ وهذا يعني أن**0 هو العنصر المحايد للقانون ***(ج) لنبين أن $(J, *)$ زمرة تبادليةليكن x من J و x' مآثله (إذا وجد) بالنسبة للقانون *

$$\text{لدينا } x * x' = 0 \Leftrightarrow \frac{x+x'}{1+xx'} = 0 \Leftrightarrow x' = -x$$

و بما أن $x \in]-1, 1[$ فإن $-x \in]-1, 1[$ و القانون * تبادلي إذن $(\forall x \in J); x * (-x) = (-x) * x = 0$

Ammarimaths

ومنه لكل x من J مماثل بالنسبة للقانون $*$ هو $-x$
خلاصة: القانون $*$ تبادلي و تجميعي و يقبل عنصرا محايدا و لكل عنصر من J مماثل في J إذن

(J, *) زمرة تبادلية

II f تطبيق معرف على \mathbb{R} ب $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

(1) لنبين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو J

ليكن y من J و لنحل المعادلة: $f(x) = y$ ($x \in \mathbb{R}$)

$$(x \in \mathbb{R}); f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = y \Leftrightarrow ye^x + y = e^x - 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+1}{1-y}$$

و بما أن $y \in J$ فإن $\frac{y+1}{1-y} > 0$ ومنه لكل y من J سابق و حيد في \mathbb{R} هو $\ln \frac{y+1}{1-y}$ نستنتج أن

f تقابل من \mathbb{R} نحو J

ملاحظة: يمكن أن نبين تقابل f باستعمال اتصال و رتبة f .

(2) \perp قانون معرف على J ب: $(\forall (x, y) \in J^2); x \perp y = f(g(x) \times g(y))$

لنبين f أن تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp) بحيث $J^* = J \setminus \{0\}$

لدينا $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$

و بما أن g هو التقابل العكسي ل f فإن $g(f(x)) = x, g(f(y)) = y$

نستنتج أن $(\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2); f(x) \perp f(y) = f(x \times y)$ و هذا يعني أن

أن f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp)

(3) لنبين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

لدينا f تشاكل من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (J^*, \perp) و (\mathbb{R}^*, \times) زمرة تبادلية إذن (J^*, \perp) زمرة تبادلية

و لدينا $(J, *)$ زمرة تبادلية و \perp توزيعي على $*$ نستنتج أن

$(J, *, \perp)$ جسم تبادلي

التمرين الرابع

I (1) لنحل في \mathbb{C} المعادلة $z^2 + i = 0$

لدينا $z + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1-i)^2 \Leftrightarrow (z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ أو } z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

بما أن a هو حل المعادلة بحيث $\text{Re}(a) > 0$ فإن $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ ومنه مجموعة حلول المعادلة هي:

$$S = \{-a, a\}$$

(2) معيار و عمدة العدد العقدي $1+a$ لدينا

$$1+a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right)$$

نستنتج أن

$$|1+a| = 2 \cos \frac{\pi}{8} \text{ و } \arg(1+a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$$

Ammarimaths

$$\text{ب) استنتاج } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{حسب السؤال السابق لدينا } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} |1+a| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+\sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ومنه

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{ج) لنبين أن } (1+a)(1-a) = 1+i$$

$$\text{لدينا } (1+a)(1-a) = 1-a^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}(+2i)\right) = 1+i$$

إذن

$$(1+a)(1-a) = 1+i$$

استنتاج الشكل المثلثي ل $1-a$

$$1-a = \frac{1+i}{1+a} = \frac{\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]}{\left[2 \cos \frac{\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}\right]} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \frac{3\pi}{8}\right] = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right] \text{ لدينا}$$

إذن الشكل المثلثي للعدد $1-a$

$$1-a = \left[\sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}\right]$$

II في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) لدينا M, B, A و M' والنقط التي أحاطها على التوالي $a, -a, z$ و z' .
بحيث $zz' + i = 0$ و N النقطة التي لحقها \bar{z} .

1) لنبين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

$$\text{لدينا } \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) \equiv \text{Arg} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) (2\pi) \text{ و } \overline{\text{arg}(\overline{OM'}, \overline{ON})} \equiv \text{Arg} \left(\frac{\text{aff}(\overline{ON})}{\text{aff}(\overline{OM'})} \right) (2\pi)$$

$$\text{و بما أن } \overline{\text{arg}(\overline{OM'}, \overline{ON})} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ و منه } \text{Arg} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ فإن } \frac{\bar{z}}{z} = \frac{z\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{-i} = iz\bar{z} = \left[z\bar{z}, \frac{\pi}{2} \right]$$

المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان

$$\text{2) (أ) لنبين أن } z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{لدينا } z' - a = \frac{-i}{z} - a = \frac{-i - az}{z} = \frac{-ia - a^2 z}{az} \stackrel{(a^2 = -i)}{=} \frac{-ia + iz}{az} = i \frac{z-a}{az}$$

و هذا هو المطلوب

$$z' - a = i \frac{z-a}{az}$$

$$\text{ب) لدينا } z' + a = z' - a + 2a = i \frac{z-a}{az} + 2a = \frac{iz - ia + 2a^2 z}{az} = -i \frac{z+a}{az}$$

$$\text{ومنه } z \neq -a \Rightarrow z+a \neq 0 \Rightarrow z' + a \neq 0 \Rightarrow z' \neq -a$$

Ammarimaths

أي أن :

$$\boxed{\text{إذا كان } z \neq -a \text{ فإن } z' \neq -a}$$

$$\text{ولدينا } z' - a = i \frac{z-a}{az} \text{ و } z' + a = -i \frac{z+a}{az} \text{ إذن } \frac{z' - a}{z' + a} = \frac{i \frac{z-a}{az}}{-i \frac{z+a}{az}} = -\frac{z-a}{z+a}$$

$$\boxed{\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z-a}{z+a}}$$

(3) بما أن النقط M, B, A غير مستقيمة فإن النقط M, B, A و M' غير مستقيمة

$$\text{إذن } M, B, A \text{ و } M' \text{ متداورة يكافئ } \frac{z-a}{z+a} \times \frac{z'+a}{z+a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{ولدينا } \frac{z-a}{z+a} \times \frac{z'+a}{z+a} = -1 \Rightarrow \frac{z-a}{z+a} = -\frac{z-a}{z+a} \Rightarrow \frac{z-a}{z+a} \times \frac{z'+a}{z+a} = -1$$

ومنه

النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث AMB

التمرين الخامس

$$f \text{ دالة معرفة على }]0, +\infty[\text{ ب } f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

(1) حساب نهايتي f عند 0^+ و عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \text{ (لأن) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$$

التأويل الهندسي

: محور الافاصليل مقارب ل (C) و محور الارايب مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

(2) حساب مشتقة f

$$f \text{ قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ ولدينا } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x \ln x - 2x}{2x^2 \sqrt{x}} = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

إذن

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}}$$

إشارة f' هي إشارة $\ln x - 2$ أي إشارة $\ln x - \ln e^2$ و منه

$$\boxed{f \text{ تزايدية قطعاً على المجال } [e^2, +\infty[\text{ و تناقصية قطعاً على }]0, e^2]}$$

$$(3) g_n \text{ دالة معرفة على }]0, 1[\text{ ب } g_n(x) = f(x) - x^n \text{ مع } n \in \mathbb{N}^*$$

Ammarimaths

(أ) لنبين أن تناقصية قطعا على $]0,1[$

g_n قابلة للاشتقاق على $]0,1[$ ولدينا $(\forall x \in]0,1[); g'_n(x) = f'(x) - nx^{n-1}$
بما أن $(\forall x \in]0,1[); f'(x) < 0$ فإن $(\forall x \in]0,1[); g'_n(x) < 0$ ومنه

 g_n تناقصية قطعا على $]0,1[$
(ب) لنبين أن $\exists! \alpha_n \in]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$

g_n متصلة و تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ إذن g_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]0,1[$ ولدينا

$$g_n(]0,1[) = \left] \lim_{x \rightarrow 1^-} g_n(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x) \right[=]-1, +\infty[$$

و بما أن $0 \in]-1, +\infty[$ فإن للمعادلة ل سابق و حيد α_n ب g_n و $\alpha_n \in]0,1[$ يعني $g_n(\alpha_n) = 0$
و بما أن $g_n(\alpha_n) = f(\alpha_n) - (\alpha_n)^n$ فإن $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ و هذا هو المطلوب:

 $\exists! \alpha_n \in]0,1[; f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$
(ج) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

حسب السؤال (ج) $\forall n \in \mathbb{N}^*; n+1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists! \alpha_{n+1} \in]0,1[$

ولدينا $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1}$ إذن $f(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1})^{n+1} - (\alpha_{n+1})^n = (\alpha_{n+1})^n (\alpha_{n+1} - 1) < 0$
و هذا هو المطلوب

 $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < 0$
(د) لنبين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا

لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* g_n(\alpha_n) = 0$ و $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); g_n(\alpha_{n+1}) < g_n(\alpha_n)$ و بما أن g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ فإن $\alpha_{n+1} > \alpha_n$
ما يعني أن :

 $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتالية تزايدية قطعا

المتتالية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية و مكبورة ب 1 إذن فهي متقاربة

(4) (أ) لنتحقق من أن $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$

بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \in]0,1[$ فإن $\lim \alpha_n \in]0,1[$ و بما أن $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا فإن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \alpha_n \geq \alpha_1$

و منه $\lim \alpha_n \geq \alpha_1$ نستنتج أن l نهاية $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تحقق

 $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$
(ب) لنبين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$

لدينا $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln x)}{\ln x}$

$(\forall x > 0); f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ و بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

فإن $(\alpha_n)^n = f(\alpha_n) = \frac{-\ln \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n}}$

Ammarimaths

و منه

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln\left((\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}\right)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\ln(\alpha_n)}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}}{-(\alpha_n)^{n+\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) = n$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); h(\alpha_n) = n$$

(ج) لنبين أن $l = 1$ نفترض أن $l \neq 1$ إذن $0 < l < 1$ و بما أن الدالة h معرفة و متصلة على المجال $]0, 1[$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(l)$ و هذا غير ممكن لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ إذن الافتراض الأول خاطئ و عكسه هو الصحيح

$$l = 1$$

(د) لنبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$ لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha_n = \ln(1) < 0$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \alpha_n = -\infty$ و منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \alpha_n} = 0$ و هذا هو المطلوب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = 0$$

(II-1) لندرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x) dx$ لكل x من \mathbb{R}^* لدينا $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx > 0$ و $x = 1 \Rightarrow \int_x^1 f(x) dx = 0$

نستنتج أن

$$(\forall x \in]0, +\infty[); \int_x^1 f(x) dx \geq 0$$

(ب) لنبين أن $(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$

$$\begin{aligned} (x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx &= \int_x^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} (-\ln x) \right]_x^1 - \int_x^1 (2\sqrt{x}) \left(\frac{-1}{x} \right) dx = 2\sqrt{x} \ln x + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2\sqrt{x} \ln x + 2 \left[2\sqrt{x} \right]_x^1 = 2\sqrt{x} \ln x + 4(1 - \sqrt{x}) = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x \end{aligned}$$

و منه

$$(x \in \mathbb{R}_+^*); \int_x^1 f(x) dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$$

(ج) حساب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي $x = 0$ و $x = e^2$ و $x = 1$ لتكن S هذه المساحة ب cm^2 لدينا $S = \left(\int_{e^2}^1 f(x) dx \right) cm^2 = \left(4 - 4\sqrt{e^2} + 2\sqrt{e^2} \ln e^2 \right) cm^2 = 4cm^2$

المساحة المطلوبة هي

$$S = 4cm^2$$

Ammarimaths

$$(2) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^* \text{ نضع: } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(أ) لدينا f متصلة وتناقصية قطعاً على $]0,1[$ و $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \subset]0,1[$ إذن f متصلة وتناقصية قطعاً على $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ ومنه

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \Rightarrow \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\text{ولدينا } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \text{ و } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

نستنتج أن لكل n و k من \mathbb{N} بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(ب) \text{ المتفاوتة السابقة تستلزم أن: } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{لدينا } f(1) = 0 \text{ إذن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n$$

$$\text{ولدينا } \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{كما أن } \sum_{k=1}^{k=n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

$$\text{نستنتج بعد التعويض في (1) أن: } (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{يعني أن } (\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(ج) \text{ حسب السؤال (ب) و بوضع } x = \frac{1}{n} \text{ نحصل على } \int_x^1 f(x) dx \leq u_n \leq xf(x) + \int_x^1 f(x) dx$$

$$\text{ولدينا } \lim_{n \rightarrow +\infty} xf(x) + \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_x^1 f(x) dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x = 4$$

إذن حسب خاصيات النهايات و الترتيب

$$\lim u_n = 4$$

التمرين السادس

$$(\forall x \in \mathbb{R}); k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt \text{ و نضع } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt \text{ ب } [0, +\infty[$$

$$(1) \text{ أ) لدينا } g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = -k(\sqrt{x})$$

أذن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) = -k(\sqrt{x})$$

Ammarimaths

(ب) اتصال و اشتقاق الدالة g

الدالة $t \rightarrow e^{-t^2}$ متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} إذن الدالة k متصلة و قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (أصلية φ التي تنعدم عند 1)
و الدالة $t \rightarrow \sqrt{t}$ متصلة على $[0, +\infty[$ و قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ (مركب k و ψ)
إذن:

$$g \text{ متصلة على } [0, +\infty[\text{ و قابلة للاشتقاق على } [0, +\infty[$$

(ج) حساب $g'(x)$

$$\text{لدينا } (\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) = -k'(\sqrt{x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) = \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

بما أن $(\forall x \in]0, +\infty[); g'(x) < 0$ فإن g تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$ و بما أنها متصلة على يمين 0 فإنها تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$

$$\text{الدالة } g \text{ تناقصية قطعاً على } [0, +\infty[$$

$$(2) \text{ لنبين أن } \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

ليكن x من \mathbb{R}_+^* الدالة g متصلة على المجال $[0, x]$ و قابلة للاشتقاق على $]0, x[$

إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية يوجد c من $]0, x[$ بحيث

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = g'(c) = \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

$$0 < c < x \Rightarrow \begin{cases} 0 < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{x} \\ c^2 < x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ -x^2 < -c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} \\ 0 < e^{-x^2} < e^{-c^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{e^{-c^2}}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} < \frac{-e^{-c^2}}{2\sqrt{c}}$$

الصفحة (8)

$$\text{ومنه } \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

$$\forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}$$

(ب) دراسة قابلية اشتقاق الدالة g على يمين الصفر و التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty \text{ إذن } \begin{cases} \forall (x \in \mathbb{R}_+^*); \frac{g(x) - g(0)}{x} < \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^{-x^2}}{2\sqrt{x}} = -\infty \end{cases} \text{ لدينا :}$$

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

و بالتالي g غير قابلة للاشتقاق على يمين 0 و مبيان g يقبل نصف مماس عمودي (موجه نحو الأسفل)

