

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

النسبة الاستثنائية 2016

- الموضوع -

RS24

ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵓⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵜⴰⴳⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵏⵓⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵓⴳⴷⴰⵢⵜ
ⵏ ⵏⵓⴷⴰⵢⵜ ⵏ ⵓⴳⴷⴰⵢⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتكوين
والامتحانات والتوجيه

★★
β

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المصنك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على 4 كرات حمراء و 4 كرات زرقاء،
الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و 4 كرات زرقاء.
نعتبر التجربة التالية: نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U ؛ إذا كانت حمراء، نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة
من الصندوق V ؛ وإذا كانت زرقاء، نضعها جانبا؛ ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V .
لكن الأحداث التالية: R_U : "الكرة المسحوبة من الصندوق U حمراء"،
 B_U : "الكرة المسحوبة من الصندوق U زرقاء"،
 R_V : "الكرة المسحوبة من الصندوق V حمراء"،
 B_V : "الكرة المسحوبة من الصندوق V زرقاء".

- 1- 0.5 أحسب احتمال كل من الحدثين R_U و B_U .
2- 0.5 (أ) أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث R_U محقق.
0.5 (ب) أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث B_U محقق.
3- 1 بين أن احتمال الحدث B_V هو: $\frac{13}{21}$
4- 0.5 استنتج احتمال الحدث R_V .

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي.

لكل عدد عقدي $z = x + iy$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ نضع: $M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E = \{M(z) / z \in \mathbb{C}\}$

1- نزود المجموعة E بقانون تركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي:

$$(\forall z \in \mathbb{C}) (\forall z' \in \mathbb{C}) : M(z) * M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$$

بين أن $(E, *)$ زمرة تبادلية. 1

2- نعتبر التطبيق $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow E$ الذي يربط كل عدد عقدي z من \mathbb{C}^* بالمصفوفة $M(z)$

(أ) بين أن φ تشكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, \times) 1

(ب) استنتج أن $(E - \{M(0)\}, \times)$ زمرة تبادلية. 0.5

3- بين أن $(E, *, \times)$ جسم تبادلي. 1

التمرين الثالث: (3.5 نقط)نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة التالية:

$$(E): z^2 - (1 + \sqrt{3})(1 + i)z + 4i = 0$$

$$\Delta = [(\sqrt{3} - 1)(1 - i)]^2 \quad (1-1) \quad 0.5$$

(ب) أكتب على الشكل المثلثي كل حل من حل المعادلة (E) 1

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و منظم و مائل (O, \vec{u}, \vec{v}) .نعتبر النقطتين A و B التي لحيتهما على التوالي $a = 1 + i\sqrt{3}$ و $b = \sqrt{3} + i$ (أ) بين أن مجموعة النقط من المستوى العقدي التي لحيها z يحقق: $z = \frac{1}{2} \bar{az}$ هي مستقيم يمر من النقطة B 0.75(ب) لتكن M و M' نقطتان لحقهما على التوالي z و z' بحيث: $z' = \bar{az} - b$ و $z \neq b$

$$\text{بين أن: } \frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \frac{2}{|z - b|^2} \quad 0.5$$

(ج) استنتج أن المستقيم (D) هو منصف الزاوية $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'})$ 0.75**التمرين الرابع: (6.5 نقط)** n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي: $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$ و ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في معلم متعامد و منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .(1- أدرس الفرعين اللانهائين للمنحنى (C_n) 0.75(ب) أدرس تغيرات الدالة f_n على $]0, +\infty[$ ثم أعط جدول تغيراتها. 0.75(ج) أنشئ (C_2) 0.52- بين أن الدالة f_n تقابل من $]0, +\infty[$ نحو \mathbb{R} 0.5(3- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0, +\infty[$ 0.5

$$\text{بحيث: } f_n(\alpha_n) = 0$$

(ب) قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ 0.5(ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً. 0.5(4- بين أن: $\ln(x) < x$; $(\forall x > 0)$ 0.5(ب) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ 0.5

5- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx$

(أ) بين أن: $I_n = f_n(c_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}])$ 0.5

(ب) بين أن: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ 0.5

(ج) حدد: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ 0.5

التمرين الخامس: (3.5 نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نعبر الدالة العددية g_n ذات المجهول x المعرفة على المجال $[n, +\infty[$ بما يلي: $g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t} dt$

1- (أ) بين أن الدالة g_n قابلة للاشتقاق على المجال $[n, +\infty[$ ثم حدد دالتها المشتقة الأولى g_n' 0.5

(ب) بين أن الدالة g_n تزايدية قطعا على المجال $[n, +\infty[$ 0.25

2- (أ) بين أن: $(\forall x \geq n) ; g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$ 0.5

(ب) يمكنك استعمال المتفاوتة التالية: $(\forall t \geq 0) ; \ln(1+t) \leq t$

(ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$ 0.25

3- (أ) بين أن الدالة g_n تقابل من المجال $[n, +\infty[$ نحو المجال $[0, +\infty[$ 0.25

(ب) استنتج أن: $\int_n^{2n} \frac{1}{\ln t} dt = 1$; $(\forall n \geq 2) (\exists! u_n \geq n)$ 0.5

4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 2}$ المعرفة في السؤال 3- (ب)

(أ) بين أن: $\int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt$; $(\forall n \geq 2)$ 0.5

(ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا. 0.5

(ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.25

انتهى