

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session de contrôle
	Épreuve : Mathématiques	Section : Mathématiques
	Durée : 4h	Coefficient de l'épreuve : 4

N° d'inscription

* * * * *

Le sujet comporte cinq pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3 points)Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- 1) Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier a^2 .
- 2) Vérifier que $a^3 \equiv a \pmod{6}$.
- 3) a/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n+1} \equiv a \pmod{6}$.
b/ En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $a^{2n} \equiv a^2 \pmod{6}$.
- 4) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 le système
$$\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \pmod{6}, \\ x^3 y^2 \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A de sens direct, le point O est le milieu du segment $[BC]$ et les triangles AEB et ACF sont équilatéraux directs.

- 1) Soit r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$. Montrer que $r_1(B) = F$ et $r_1(E) = C$.
- 2) Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA) .
a/ Montrer que $S([BE]) = [CF]$.
b/ Les droites (BE) et (CF) se coupent en un point Ω .
Montrer que les points A , O et Ω sont alignés.
- 3) Soit f un déplacement qui envoie le segment $[BE]$ sur le segment $[CF]$.
a/ Montrer que $f = r_1$ ou f est la rotation r_2 d'angle $-\frac{\pi}{6}$ et de centre Ω .
b/ Construire le point $A' = r_2(A)$ et montrer que $ACA'F$ est un losange.
- 4) Soit g l'antidépacement qui envoie B sur F et E sur C .
a/ Montrer que g est une symétrie glissante.
b/ Montrer que $g(A) = A'$.
c/ Soit I le milieu du segment $[BE]$ et $J = g(I)$. Montrer que $g = S_{(IJ)} \circ t_{\vec{IJ}}$.



Exercice 3 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) a/ Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation : $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$.

On note z_1 et z_2 les solutions avec $\text{Im}(z_1) > 0$.

b/ Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $e^{i\frac{5\pi}{6}}$. Δ est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

2) La droite Δ coupe la droite (OB) au point C .

Montrer que l'affixe du point C est égale à z_1 .

3) Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{1}{3\sqrt{3}}i$.

a/ Vérifier que $z_D = z_1^3$.

b/ Montrer que $\frac{z_D - 1}{z_1 - 1} = \frac{2}{3}$.

c/ Construire le point D .

4) Soit $z \in \mathbb{C}$.

Montrer que $(z^2 + z \in \mathbb{R})$ équivaut à $(z \in \mathbb{R} \text{ ou } \text{Re}(z) = -\frac{1}{2})$.

5) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on désigne par M et N les points d'affixes respectives z et z^3 .

a/ Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs \vec{AM} et \vec{AN} sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point P de la droite Δ d'affixe α .
Construire, en justifiant, le point Q d'affixe α^3 .

Exercice 4 (7.5 points)**Partie A**

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , la courbe représentative (\mathcal{C}_g) de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x$.

α et β sont les réels tels que $g(\alpha) = 1$ et $g(\beta) = \frac{1}{2}$.

1) En utilisant le graphique,

a/ donner le tableau de signe de la fonction dérivée g' de g ,

b/ résoudre dans \mathbb{R} chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x) < \frac{1}{2} \text{ et } g(x) < 1.$$

2) Montrer que $\alpha > \frac{1}{2}$.



- 3) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = g(x) - (g(x))^2$.
On désigne par (\mathcal{C}_f) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- Calculer $f(\alpha)$ et $f(\beta)$.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. Interpréter le résultat.
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Déterminer la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
- 4) a/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2g'(x) \left(\frac{1}{2} - g(x) \right)$.
b/ Dresser le tableau de variation de f .
c/ Tracer (\mathcal{C}_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 5) Soit \mathcal{A} l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par (\mathcal{C}_f) , (\mathcal{C}_g) et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=\alpha$.
- Montrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^\alpha x e^{2x} dx$.
 - En déduire que $\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}$.

Partie B

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $J_n = \int_0^\alpha (g(x))^n dx$.

- Montrer que $0 \leq J_n \leq \frac{\alpha}{n+1}$.
 - En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.
- Montrer que $\int_{\alpha - \frac{1}{n}}^\alpha (g(x))^n dx \leq J_n$.
 - Montrer que $\frac{1}{n} \left[g \left(\alpha - \frac{1}{n} \right) \right]^n \leq J_n \leq 1$.
 - Justifier que $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ puis montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$.



Section : N° d'inscription : Série :

Nom et Prénom :

Date et lieu de naissance :

Signatures des surveillants

.....

.....



Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session de contrôle (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

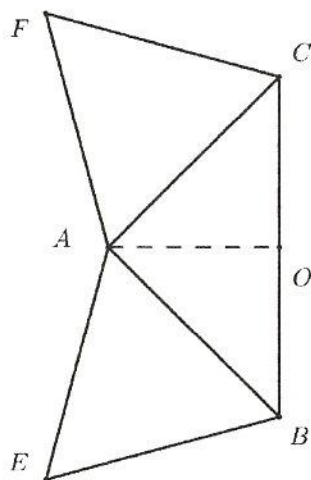
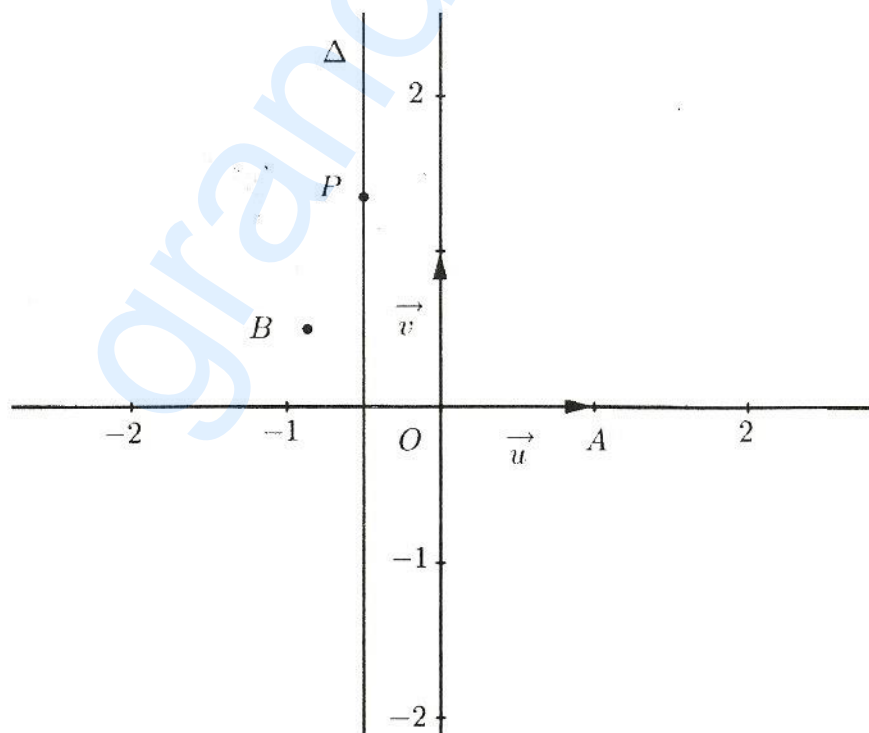


Figure 2



Ne rien écrire ici

Figure 3

