

Le sujet comporte trois pages, la page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points)

On considère, dans \mathbb{C} , les deux équations suivantes :

$$(E_1) : z^2 - (1 + 5i)z - 8 + i = 0$$

$$\text{et } (E_2) : z^3 - (1 + 6i)z^2 + (-13 + 2i)z + 1 + 8i = 0.$$

- 1) a) Vérifier que $(3 + i)^2 = 8 + 6i$
 b) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E_1) .
- 2) a) déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$$z^3 - (1 + 6i)z^2 + (-13 + 2i)z + 1 + 8i = (z - i)(z^2 + bz + c)$$

 b) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation (E_2) .
- 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2 + 3i$ et $z_C = -1 + 2i$;
 a) Placer les points A, B et C.
 b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 2 (5 points)

Le tableau suivant donne la proportion des ménages abonnés à Internet

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Pourcentage (y_i)	8,1	11,4	14,3	17,1	22	28,8	33,5

Source : Tunisie Télécom

- 1) a) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.
 b) Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage est justifié.
 c) Calculer les coordonnées, à 0,1 près, du point moyen G du nuage. Placer G sur le graphique précédent.
- 2) a) Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x.
 b) Estimer alors la proportion des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2018.
- 3) Peut-on à l'aide de cet ajustement, estimer la proportion des ménages tunisiens abonnés à Internet en 2032 ?

Exercice 3 (6 points)

- I) On donne dans l'annexe joint, la courbe représentative (C_g) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction g définie sur $]0, +\infty[$.
- 1) A l'aide d'une lecture graphique :
 - a) Déterminer $g(1)$ et $g'(1)$.
 - b) Dresser le tableau de signe de g sur $]0, +\infty[$.
 - 2) On suppose, dans la suite, que $g(x) = a + b \ln x$ où a et b sont deux constantes réelles. Montrer que $a = -1$ et $b = 2$.
- II) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - 2) a) Montrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - b) Dresser le tableau de variation de f .
 - c) Calculer $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
 - d) Tracer (C_f) .
 - 3) a) Montrer que $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx = 0$.
 - b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = \sqrt{e}$.

Exercice 4 (4 points)

On considère la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

- 1) a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4 .
 - b) Que peut-on dire à propos des deux derniers chiffres du terme U_n ?
 - c) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n , $U_n \equiv 13[50]$.
 - d) En déduire les deux derniers chiffres du terme U_n .
- 2) Montrer que pour tout entier n ; U_n et U_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

Épreuve : MATHÉMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique (Session principale)

Annexe (à rendre avec la copie)

