RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	Session principale	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 :(6.5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x\geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $f''(x)=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

c) Déduire que le point $A(1,\ln 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

3) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) et les points A, $E(0,\ln 2-1)$ et $K(1-\ln 2,0)$.

a) Soit T la tangente à (C) au point A. Montrer qu'une équation de T est $y = x-1+\ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K.

c) Tracer la tangente T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

a) Montrer que $L=\frac{(1-\ln 2)^2}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $\ln(1+x^2)\leq\ln(1+x)$.

c) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$.

d) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2-1$.

e) Montrer que $\frac{(1-\ln 2)^2}{2}\leq S\leq \ln 2-\frac{1}{2}$.

Exercice 2 :(4 points)

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ -2\alpha & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le déterminant de M_α est égal à $-4\alpha + 8$.

b) Pour quelle valeur de α, M_α est-elle non inversible ?

2) Dans cette question, on prend $\alpha = 2$ et on note $C = M_2$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3) Dans cette question, on prend $\alpha = -2$ et on note $A = M_{-2}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A \times B = 4I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

b) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$, le système (S') : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :(4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n}\left(1 - \sqrt{1+u_n}\right)$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(1+u_n)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 2$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4 :(5.5 points)

1) a) Vérifier que $(2-2i)^2 = -8i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(2+8i)z-15+10i=0$.

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+3i$, $z_B = -1$ et $z_C = 5i$.

a) Calculer $(z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Soit x et y deux entiers tels que $y \neq 0$.

Dans le plan P, on considère les points M et N d'affixes respectives x et iy. On se propose de déterminer les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A.

a) Montrer que $(z_M - z_A)\overline{(z_N - z_A)} = (-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)$.

b) Montrer que $(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y) \neq 0$.

c) Montrer que le triangle AMN est rectangle en A si et seulement si $2x+3y=13$.

4) Soit dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x+3y=13$.

a) En utilisant la question 2), donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) Trouver les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A et $-4 \leq x \leq 4$.

Section : ………… …….N° d'inscription : …………… Série :…….

Nom et Prénom : ……………………………………………………

Date et lieu de naissance : …………………… ………..………

Signatures des surveillants

…………………………

…………………………

Epreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique
(Session principale 2019)

Annexe à rendre avec la copie