

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ◆◆◆ <b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b> SESSION DE JUIN 2014	Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b>
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
<b>Section : Sciences expérimentales</b>	<b>Session principale</b>

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x}$ .

On désigne par  $C_f$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ . Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -\frac{(2+e^{-x})}{(1+e^x)^2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Justifier que la tangente (T) à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ .

b) Utiliser le tableau de signe ci-contre pour préciser la position relative de  $C_f$  et (T).

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x) + \frac{3}{4}$		$-$	$+$

c) Tracer (T) et  $C_f$ .

4) Soit  $\lambda$  un réel strictement positif. On désigne par  $A_\lambda$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $C_f$ , les axes du repère et la droite d'équation  $x = \lambda$ .

a) Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ .

b) Montrer que  $A_\lambda = -e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2$ .

c) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$ .

### Exercice 2 (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les 5 minutes, la température  $T$  de ce liquide.

Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de  $20^\circ\text{C}$  :

$t$ (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$T$ (en $^\circ\text{C}$ )	100	68.5	50	37.8	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

On pose  $\theta = \ln(T - 20)$ .

Les valeurs de  $\theta$ , arrondies à  $10^{-2}$  près, sont données dans le tableau qui suit :

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$\theta$	4.38	3.88	3.40	2.88	2.40	1.87	1.39	0.69	0.41	-0.10	-0.69	-1.2	-1.60

- 1) a) Construire le nuage de points de la série  $(t, \theta)$ , dans le repère proposé dans l'annexe ci-jointe (**figure 1**).
- b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire  $r$  de la série  $(t, \theta)$ . Interpréter le résultat.
- 2) a) Donner une équation de la droite de régression de  $\theta$  en  $t$ .  
(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à  $10^{-2}$  près).
- b) En déduire que l'expression de  $T$  en fonction de  $t$  est de la forme  $T = 20 + \alpha e^{\beta t}$ ,  
 $\alpha$  et  $\beta$  étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à  $10^{-1}$  près.
- c) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.
- d) La température de cette tasse de café atteindra-t-elle  $18^\circ\text{C}$ ? Expliquer.

### Exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère la sphère  $(S)$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$  et le plan  $P$  d'équation  $x + 2y + z - 6 = 0$ .

- 1) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère  $(S)$ .
- b) Montrer que le plan  $P$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(C)$  dont on précisera le centre et le rayon.
- 2) On donne les points  $A(2, 0, 2)$  et  $B(2, 2, 0)$ .
  - a) Vérifier que  $A$  appartient à la sphère  $(S)$  et n'appartient pas au plan  $P$  et que  $B$  appartient au cercle  $(C)$ .
  - b) Soit  $Q$  l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $MA = MB$ .  
Montrer que  $Q$  est le plan d'équation  $y = z$ .
  - c) Montrer que les plans  $P$  et  $Q$  se coupent suivant la droite  $\Delta$  dont une représentation paramétrique est 
$$\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$
- 3) Déterminer un point  $C$  du cercle  $(C)$  tel que  $ABC$  est un triangle équilatéral.

**Exercice 4 (6 points)**

1) Soit les nombres complexes  $z_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $z_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

a) Calculer  $z_1 + z_2$  et  $z_1 \times z_2$ .

b) En déduire que, pour tout nombre complexe  $z$ ,  $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$ .

Dans la suite, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  et on considère les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

2) Dans l'annexe ci-jointe (**figure 2**), on a tracé le cercle (C) de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$  et on a placé le point H d'affixe  $\frac{-i\sqrt{3}}{2}$ .

a) Montrer que  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent au cercle (C).

b) Justifier que H est le milieu du segment  $[M_1M_2]$ .

c) Construire les points  $M_1$  et  $M_2$ .

3) Soit K le point d'affixe  $-i\sqrt{3}$ .

Soit  $z$  un nombre complexe et M et N les points du plan complexe d'affixes respectives  $z$  et  $z^3$ .

a) Montrer que :

(K est le milieu du segment  $[MN]$ ) si et seulement si  $(z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0)$ .

b) Vérifier que  $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2)$ .

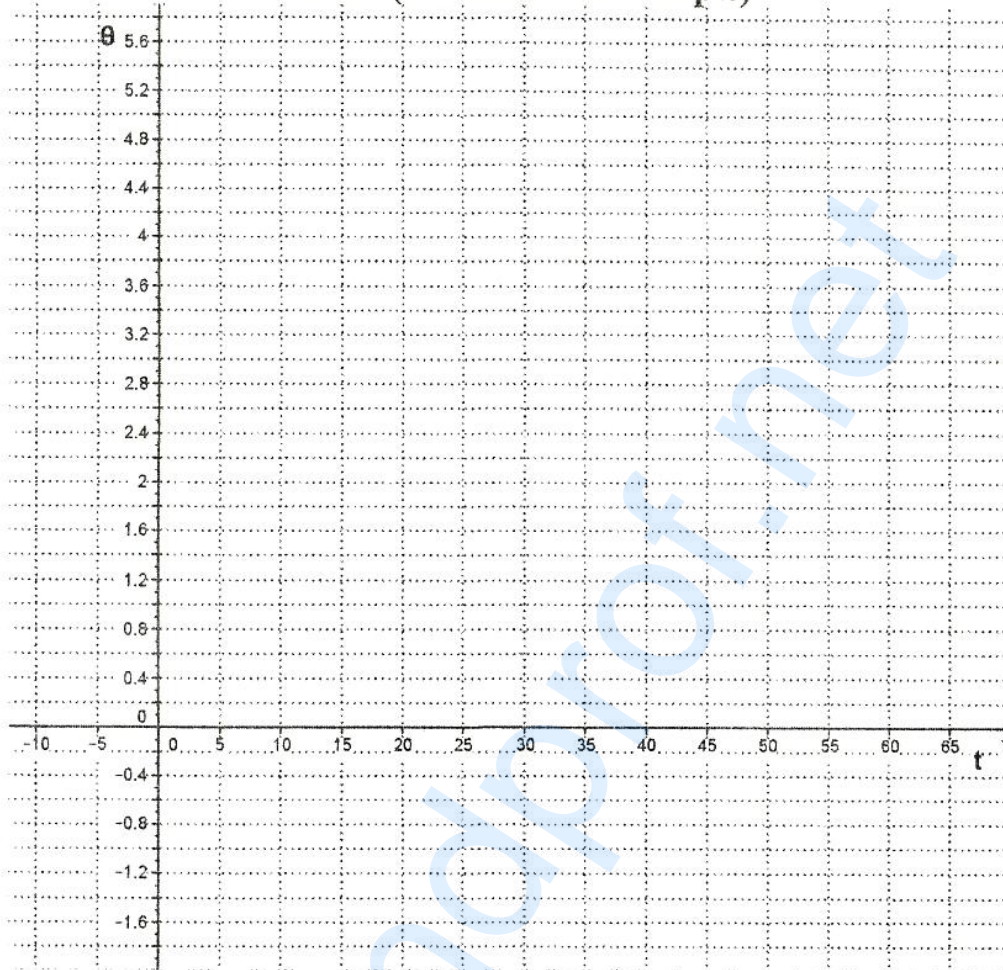
c) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ .

d) Construire alors les points  $N_1$  et  $N_2$  d'affixes respectives  $z_1^3$  et  $z_2^3$  (On rappelle que  $z_1$  et  $z_2$  sont les affixes des points  $M_1$  et  $M_2$ ).

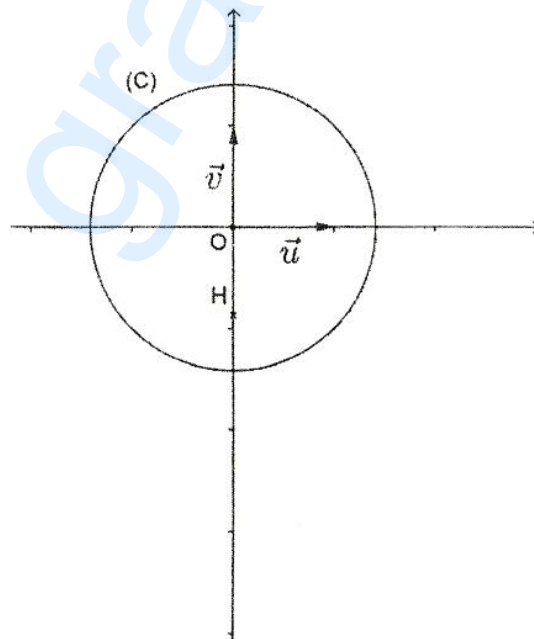
e) Déterminer l'affixe  $a$  d'un point A de l'axe  $(O, \vec{v})$  dont le symétrique par rapport au point K est d'affixe  $a^3$ .

Epreuve : MATHÉMATIQUES - Section : Sciences expérimentales

Annexe (à rendre avec la copie)



(figure 1)



(figure 2)