

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : <b>MATHÉMATIQUES</b>	
	Section : <b>Sciences expérimentales</b>	
	Durée : 3 h	Coefficient : 3
SESSION 2016	Session principale	

(Le sujet comporte trois pages numérotées de 1/3 à 3/3 )

### Exercice 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1) Soit P et Q les plans d'équations respectives  $x + y - z - 5 = 0$  et  $x + y - z + 7 = 0$ .

Montrer que les plans P et Q sont strictement parallèles.

2) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 1 = 0$ .

a) Justifier que S est la sphère de centre I(1, 2, 1) et de rayon  $R = \sqrt{5}$ .

b) Montrer que  $P \cap S$  est un cercle  $\mathcal{C}$  de centre J(2, 3, 0) dont on déterminera le rayon.

c) Déterminer  $Q \cap S$ .

3) On donne les points A(0, 0, 1), B(0, 1, 2) et C(2, 2, 5).

a) Déterminer les composantes du vecteur  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ .

b) Montrer que pour tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace,  $(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AM} = 2(x + y - z + 1)$ .

4) Déterminer l'ensemble des points M de la sphère S pour lesquels ABCM est un tétraèdre de volume égal à 2.

### Exercice 2 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A et B d'affixes respectives  $a = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$  et  $b = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ .

1) a) Construire, dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les points A et B.

b) Ecrire a et b sous forme algébrique.

2) La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par A et la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par B se coupent en un point C.

a) Déterminer l'affixe c du point C.

b) Vérifier que  $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$ .

3) On considère le point D d'affixe  $c^2$ .

a) Montrer que  $OD = 5$ .

b) En déduire une construction du point D.

4) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $2z^2 - 2z - i\sqrt{6} = 0$ .

On désigne par  $z_1$  la solution dont la partie réelle et la partie imaginaire sont positives et par  $z_2$  l'autre solution.

5) Soit les points  $I$ ,  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $1$ ,  $z_1$  et  $z_2$ .

- Justifier que le point  $M_1$  est le milieu du segment  $[IC]$ .
- Montrer que le quadrilatère  $OCM_1M_2$  est un parallélogramme.
- Construire les points  $M_1$  et  $M_2$ .

### Exercice 3 (6,5 points)

A) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$ .

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

b) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet une branche parabolique de direction celle de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -x$ .

2) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$ .

b) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

c) Calculer  $f(1)$ . En déduire le signe de  $f(x)$  pour  $x \in ]0, +\infty[$ .

d) Montrer que  $I(1, 0)$  est un point d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$ .

3) a) Tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .

b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $\mathcal{C}$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

4) Soit  $x > 0$ .

a) Vérifier que  $f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ .

b) En remarquant que  $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} > 1$ , montrer que  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$ .

B) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \ln^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

1) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près de  $u_3$ .

2) a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

b) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ .

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \leq 1 - \frac{1}{n+1}$ .

d) En déduire que  $(u_n)$  est convergente vers un réel  $\ell$  et que  $0,7 < \ell \leq 1$ .

**Exercice 4 (3,5 points)**

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par  $(X, Y)$  la série statistique double, où  $X$  est le rang de l'année et  $Y$  est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

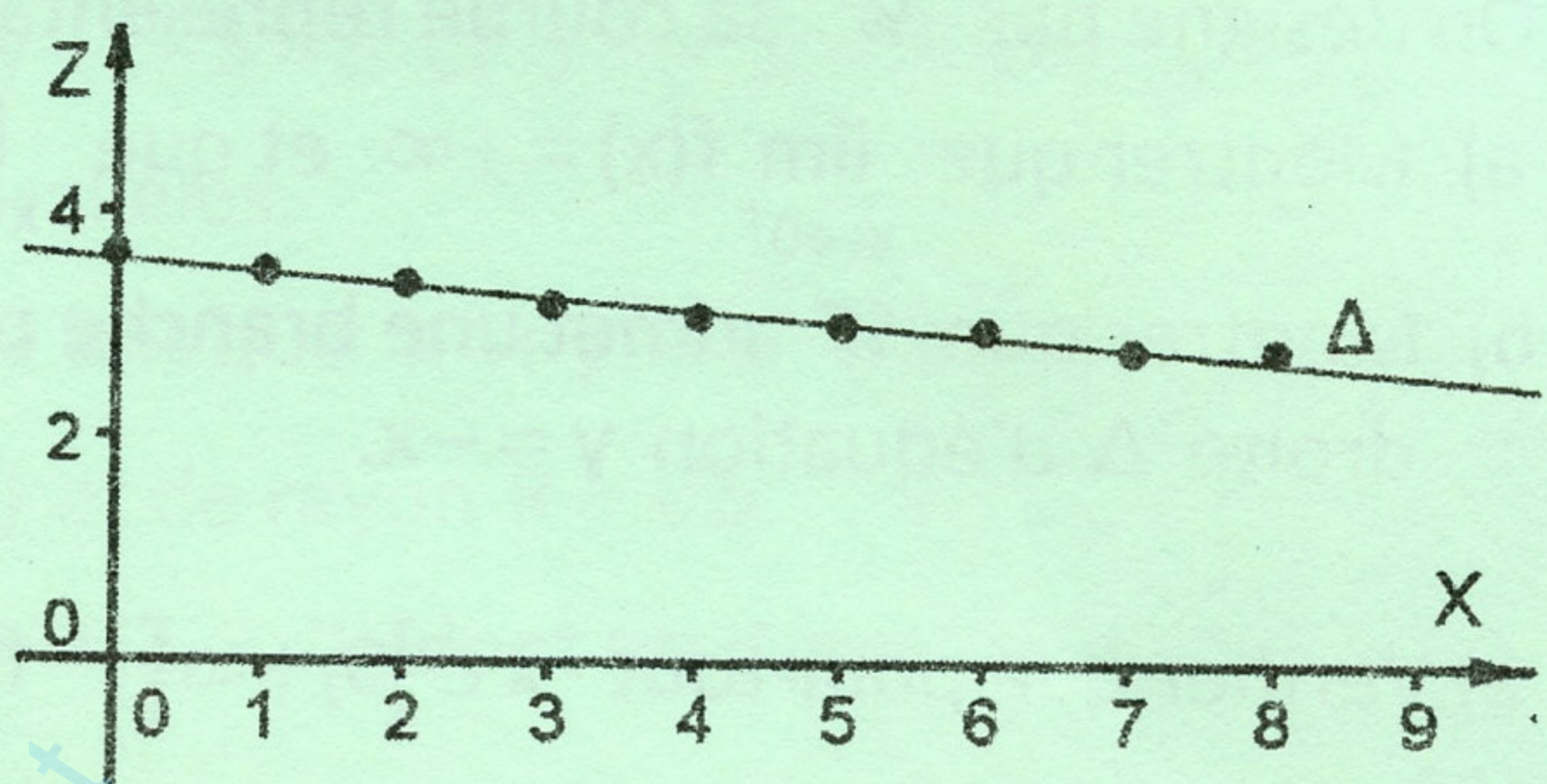
Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang $x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux $y_i$	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

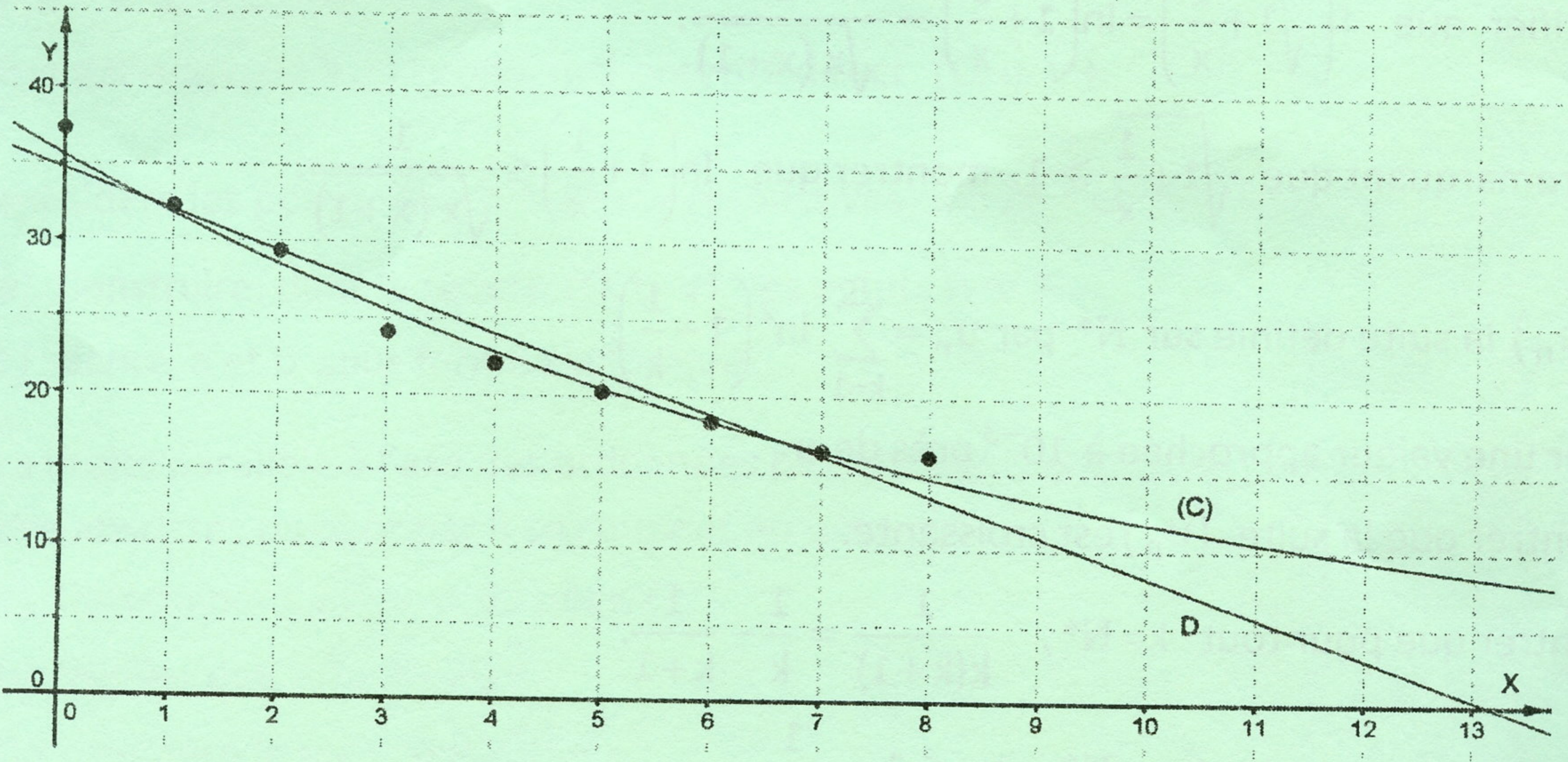
- 1) a) Déterminer, à  $10^{-2}$  près, le coefficient de corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .
- b) Ecrire une équation de la droite de régression  $D$  de  $Y$  en  $X$ .  
(les coefficients seront arrondis au centième).
- c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose  $Z = \ln(Y)$ .

Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique  $(X, Z)$  et la droite de régression  $\Delta$  de  $Z$  en  $X$  dont une équation est  $z = -0,11x + 3,57$ .



- a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation  $y = 35,52 e^{-0,11x}$ .
  - b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.
- 3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite  $D$  définie en 1) b), la courbe  $(C)$  d'équation  $y = 35,52 e^{-0,11x}$  et le nuage de points de la série  $(X, Y)$ .



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ? Justifier la réponse.