| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION 2020 | Session de contrôle | |
|---|---|---|
| | Épreuve : **Mathématiques** | Section : **Mathématiques** |
| | Durée : **4h** | Coefficient de l'épreuve : **4** |

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

## Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure** de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

I, J et K sont les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Soit S la similitude directe de centre B et telle que S(J)=C.

1) Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2) Soit $(\Gamma)$ le cercle de diamètre $[AB]$ et $(\Gamma')$ le cercle circonscrit au triangle ABC.
   a) Montrer que S (K) = O.
   b) En déduire que $S(\Gamma) = \Gamma'$.
   c) Déterminer et construire le point $A' = S(A)$.

3) La droite (OC) recoupe $(\Gamma')$ en P et la droite (BP) recoupe $(\Gamma)$ en Q.

On note $S^{-1}$ l'application réciproque de S.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $S^{-1}$
   b) Montrer que $S^{-1}(A) = Q$.
   c) Quelle est la nature du triangle BJQ ?
   d) Prouver que K est le milieu du segment $[QI]$.

4) Soit $\sigma = S \circ S_{(AB)}$ où $S_{(AB)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
   a) Justifier que $\sigma$ est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
   b) Déterminer $\sigma(Q)$ et $\sigma(J)$.
   c) La droite $(IJ)$ coupe la droite $(QB)$ en un point M.
   Déterminer et construire le point $M' = \sigma(M)$.

## Exercice 2 : (4 points)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et r le reste modulo 7 de k.

1) Montrer chacun des résultats suivants :
   $k^3 \equiv 1 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{1, 2, 4\}$.
   $k^3 \equiv 6 \pmod 7$, si et seulement si, $r \in \{3, 5, 6\}$.
   $k^3 \equiv 0 \pmod 7$, si et seulement si, $r = 0$.
2) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer les restes possibles modulo 7 de $x^3 + y^3$.
3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $E_a = \left\{ (x,y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ x^3 + y^3 = a \right\}$.

Montrer que les équations $x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod 7$ et $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod 7$ n'admettent

pas de solutions dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

4) On considère l'ensemble $E_{9990}$. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $(x, y) \in E_{9990}$.
   a) Montrer alors que $x \equiv 0 \pmod 7$ ou $y \equiv 0 \pmod 7$.
   b) Déterminer $E_{9990}$.

## Exercice 3 : (5 points)

On dispose d'une urne $U_1$ contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne $U_2$ contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de $U_1$.

- Si elle est blanche, on la remet dans $U_1$ et on tire simultanément deux boules de $U_2$,

- Si elle est noire, on la met dans $U_2$ et on tire simultanément deux boules de $U_2$.

On considère les évènements suivants :

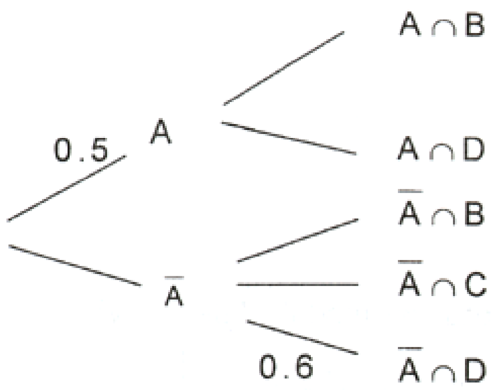
A « La boule tirée de $U_1$ est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne $U_2$. »

C « On tire deux boules noires de l'urne $U_2$. »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne $U_2$. ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :




b) Déterminer $p(B)$ et $p(D)$.

c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans $U_2$ est égale à $\frac{3}{10}$

2) Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans $U_2$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans $U_2$ ?

3) On répète n fois de suite $(n>1)$ et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente. On désigne par $F_n$ l'évènement : « Il ne reste dans $U_2$ aucune boule noire pour les (n-1) premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la $n^{\text{ème}}$ épreuve ».

Quelle est la probabilité $p_n$ de $F_n$ ?

## Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x\ln(1+x)}{1+x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2}$, $x > -1$.

c) Montrer que $x+\ln(1+x) > 0$, si et seulement si, $x > 0$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Tracer (C).

B) Soit G la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n)\,dt$ et on considère la fonction $F_n$ définie sur $[1, +\infty[$ par $F_n(x) = \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t}\sqrt[n]{t}\,dt$.

1) Montrer que $G(x) = \frac{1}{2}\ln^2(1+x) - \frac{1}{2}\ln^2(2)$, $x \geq 1$.

2) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $G(x^n) \leq F_n(x) \leq x\,G(x^n)$.

3) Montrer que $F_n$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que $F'_n(x) = n f(x^n)$, $x \geq 1$.

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $n V_n = F_n(\frac{n+1}{n})$.

5) a) Montrer que $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.

b) Vérifier que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

Section : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . N° d'inscription : . . . . . . . . . . . . . . . Série : . . . . . . .

Nom et Prénom : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Date et lieu de naissance : . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Signatures des surveillants

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**
**Session de contrôle (2020)**
**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure**