


RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2019	<b>Session principale</b>	
	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	Section : <b>Mathématiques</b>
	 Durée : <b>4h</b>	Coefficient de l'épreuve : <b>4</b>

☞ ☞ ☞ ☞ ☞ ☞ ☞

*Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.*

*La page 4 / 4 est à rendre avec la copie*

**Exercice 1 : (5 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

$\xi$  est le cercle de centre  $O$  et de diamètre  $[BC]$ ,  $M$  est le point de  $[BC]$  tel que  $CM = \frac{1}{3}BC$

et  $\xi'$  est le cercle de diamètre  $[CM]$ .  $I$  et  $I'$  sont les milieux respectifs des segments  $[BM]$  et  $[CM]$ .

$A$  et  $A'$  sont deux points du cercle  $\xi$  tels que  $AMA'B$  est un losange et  $(\widehat{AC}, \widehat{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

La droite  $(AC)$  recoupe le cercle  $\xi'$  en  $H$ .

- 1) a) Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(HM)$  sont parallèles.
- b) En déduire que les points  $H$ ,  $M$  et  $A'$  sont alignés.
- c) Montrer que  $HM = \frac{1}{3}AB$  et que  $HA^2 = AB^2 - HM^2$ .

- 2) On désigne par  $S$  la similitude directe de centre  $H$  qui envoie  $A$  en  $M$ .

- a) Préciser l'angle de  $S$  et montrer que son rapport est égal à  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

- b) Déterminer les images par  $S$  des droites  $(AI)$  et  $(MH)$ . En déduire  $S(A')$ .

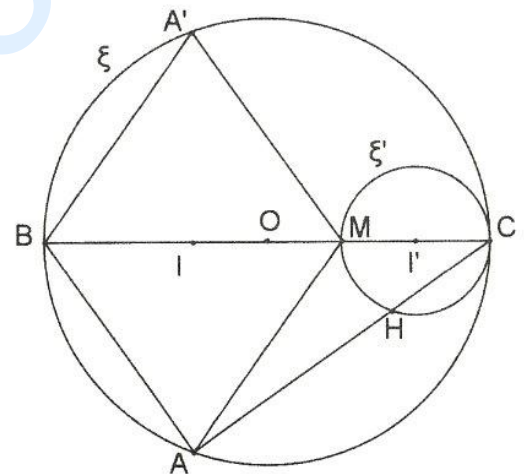
- 3) Montrer que  $S(I) = I'$  et en déduire que  $(HI)$  est tangente en  $H$  au cercle  $\xi'$ .

- 4) On pose  $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$ .

- a) Vérifier que  $S'$  est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.

- b) La droite  $(A'M)$  recoupe le cercle  $\xi$  en  $N$ . Montrer que le triangle  $MCN$  est isocèle de sommet principal  $C$ .

- c) Déterminer  $S'(A)$ . En déduire alors l'angle de  $S'$ .



**Exercice 2 : (4 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(2,0,1)$ ,  $B(-2,0,1)$ ,  $C(1,1,1)$  et  $D(-4,0,-1)$ .

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.  
b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation  $z = 1$ .
- 2) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$ .  
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre  $\Omega$ .  
b) Soit le point  $I(0, 0, 1)$ , montrer que S et P se coupent suivant le cercle  $\mathcal{C}$  de centre I et de rayon 2.
- 3) Soit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $\Omega_\lambda(0, 0, \lambda)$  et  $R_\lambda = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$ .  
a) Montrer que la sphère  $S_\lambda$  de centre  $\Omega_\lambda$  et de rayon  $R_\lambda$  coupe P suivant le cercle  $\mathcal{C}$ .  
b) Déterminer  $\lambda_0$  pour que  $D \in S_{\lambda_0}$ .  
c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en  $S_{\lambda_0}$ .

**Exercice 3 : (5 points)**

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) :  $29x - 13y = 6$ .  
a) Vérifier que  $(2,4)$  est une solution de (E).  
b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E).

Soit dans  $\mathbb{Z}$  l'équation (E') :  $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$ .

- 2) Justifier que  $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$  et en déduire que  $-8$  est solution de (E').
- 3) Soit  $x_0$  une solution de (E').  
a) Montrer que  $x_0$  n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que  $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ .  
b) Montrer que  $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$  puis que  $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$ .  
c) En déduire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation (E').  
d) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$ .

- 4) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système 
$$\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}, \\ (x - 3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}. \end{cases}$$

**Exercice 4 : (6 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ .

- 1)
  - a) Montrer que  $f$  possède une fonction réciproque  $g$  définie sur  $[0, 1[$ .
  - b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$  ;  $g(x) = -\ln(1 - x^2)$ .
  - c) Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet une solution  $\alpha$  sur  $[0,7 ; 0,8]$ .
  - d) On donne en annexe la représentation graphique  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la première bissectrice  $\Delta$  et le point  $A(\alpha, \alpha)$ .  
On désigne par  $\mathcal{C}'$  la courbe de  $g$ . Tracer  $\mathcal{C}'$  dans le même repère.
- 2) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par  $\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$ .
  - a) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et que  $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ .
  - b) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1[$ ,  $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$ .
  - c) En déduire que  $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ,  $x \in [0, 1[$ .
  - d) On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire de la région du plan située entre les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .  
Montrer que  $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ .
- 3) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k}$ .  
Soit  $n \geq 1$ . On pose pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$ .
  - a) Montrer que  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = u_n$ .
  - b) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $S_n(t) = (1 - t^{2n}) g'(t)$ , où  $g'$  est la dérivée de la fonction  $g$  sur  $[0, 1[$ .
  - c) Montrer que pour tout  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $(1 - \frac{1}{3^n}) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$ .
  - d) En déduire que  $(1 - \frac{1}{3^n}) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq u_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3})$ .
- 4) Montrer alors que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....



Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie

