REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : **Sciences techniques**	**Session principale**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.
La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

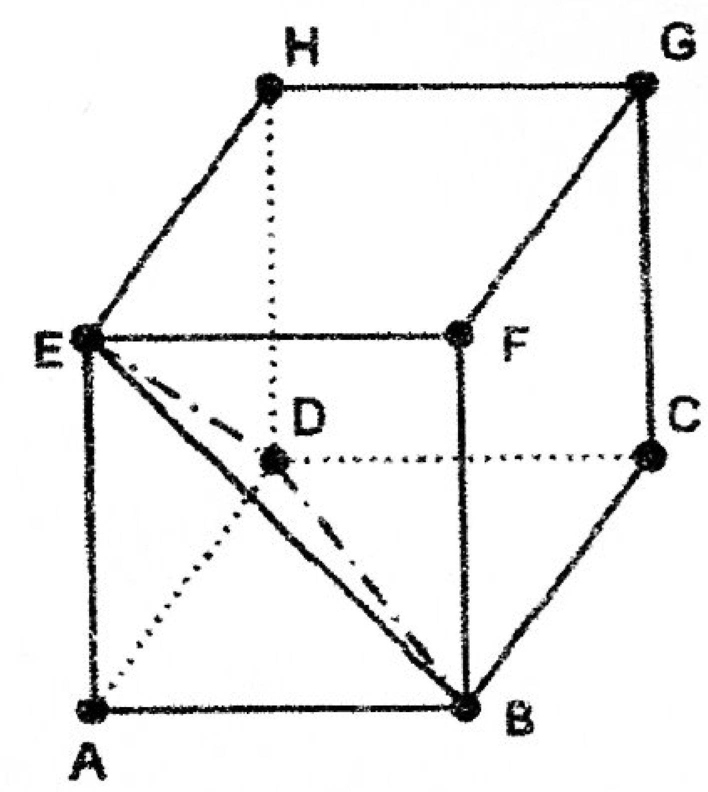
I) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne les points $A(1,0,-1)$, $B(0,2,-2)$ et le plan $P : x-2y+z+6=0$.

La droite (AB) est :

a) Strictement parallèle au plan P b) sécante avec le plan P c) incluse dans le plan P.

II) Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.
Le volume du tétraèdre EABD est égale à :

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$



III) Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne la sphère S de centre O et de rayon 2 et le plan Q d'équation : $x+y+z-3=0$.

On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan Q.

1) Les coordonnées du point H sont :

a) $(1,1,1)$ b) $(-1,-1,-1)$. c) $(3,0,0)$

2) L'intersection du plan Q avec la sphère (S) est :

a) Le vide b) Un cercle c) Un point.

Exercice 2 (5 points)

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2+2(\sqrt{3}-i)z-4i\sqrt{3}=0$.

1) a- Vérifier que : $(2\sqrt{3}+2i)^2 = 8+8i\sqrt{3}$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=-2\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{3}-3i$.

a- Montrer que le triangle OAB est isocèle en O.

b- Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Construire le point B dans le même repère.

3) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C=2i$ et $z_D=-\frac{z_B}{2}$.

a- Montrer que $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$.

En déduire que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC)

b- Montrer que les points A, D et C sont alignés.

c- Placer le point C et construire le point D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

d- Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $6\sqrt{3}$.

Exercice 3 (5 points)

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - u_n} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) a- Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n < \sqrt{2}$.

b- Montrer que la suite u est croissante.

c- En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$.

a- Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}$

b- En déduire que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c- Exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = \dfrac{\sqrt{2}\,n}{n+1}$.

3) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = \ln(u_n)$ et $S_n = w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_n$.

a- Montrer que $S_n = \dfrac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$.

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par : $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$.

b-Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

2) a- Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$; $f'(x) = -\dfrac{x+2}{x+1} + \ln(x+1)$.

b- Le tableau ci-dessous indique la variation de la fonction dérivée f' de f.

Le réel α vérifie $f'(\alpha)=0$.

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Déterminer alors le signe de $f'(x)$ sur $]-1,+\infty[$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

3) Dans **la figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe C_g de la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{-x^2}{x+1}$, la droite $\Delta: x=-1$ et on a placé le réel α.

a- Vérifier que $\ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}$ et en déduire que $f(\alpha)=g(\alpha)$.

b- Construire le point P d'abscisse α de la courbe C_f.

4) a- Déterminer les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b- Tracer C_f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) a- Vérifier que pour tout $x>-1$ on a : $g(x)=1-x-\dfrac{1}{x+1}$.

b- Calculer $\displaystyle\int_0^\alpha g(x)dx$.

c- A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^\alpha x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\alpha^2\ln(\alpha+1)+\frac{1}{2}\int_0^\alpha g(x)dx.$$

d- Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que $\mathcal{A}=\dfrac{3\alpha^3-\alpha^2+4}{4(\alpha+1)}$.

Épreuve : Mathématiques – Section : sciences Techniques

Annexe à rendre avec la copie

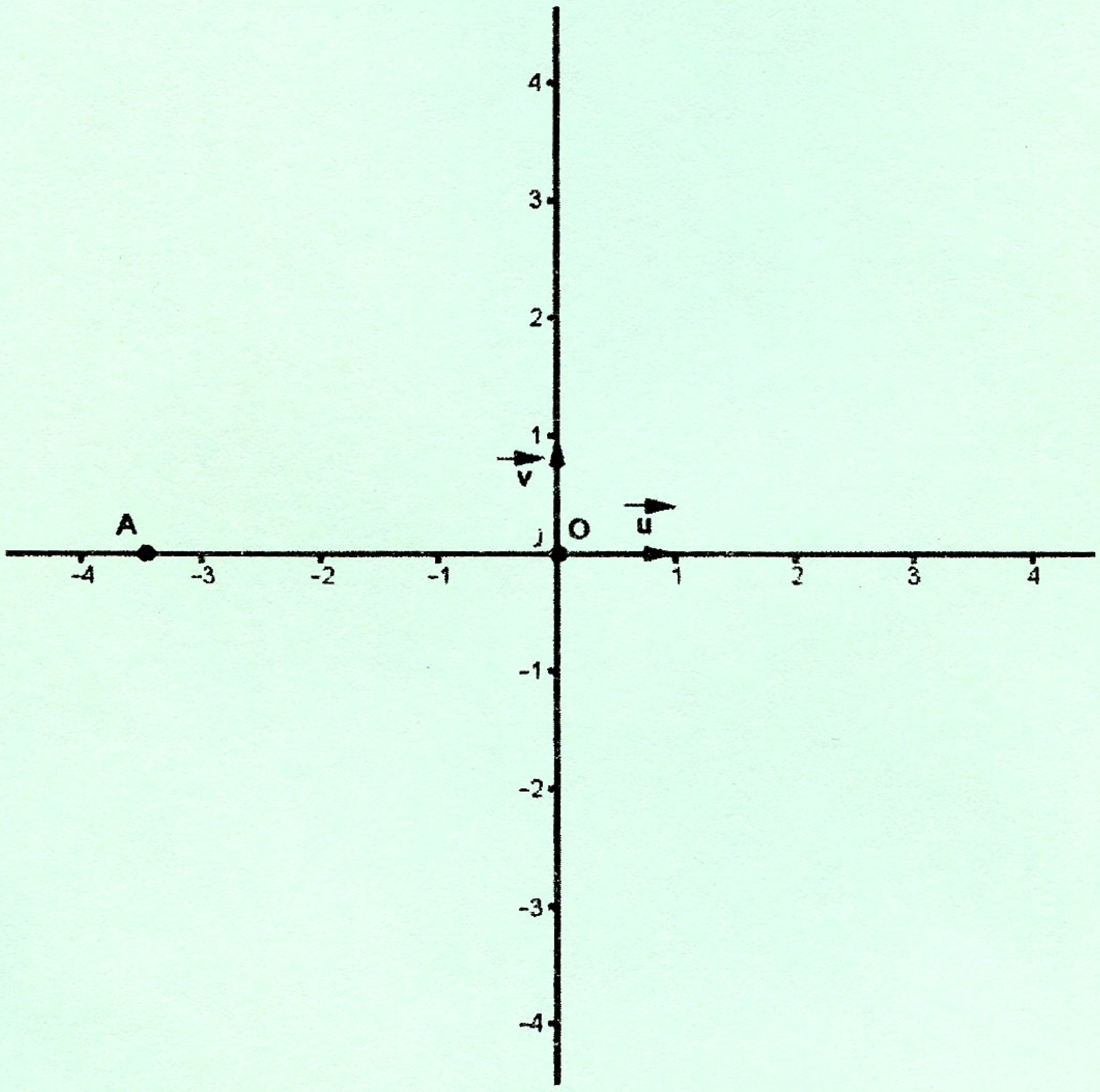


Figure 1

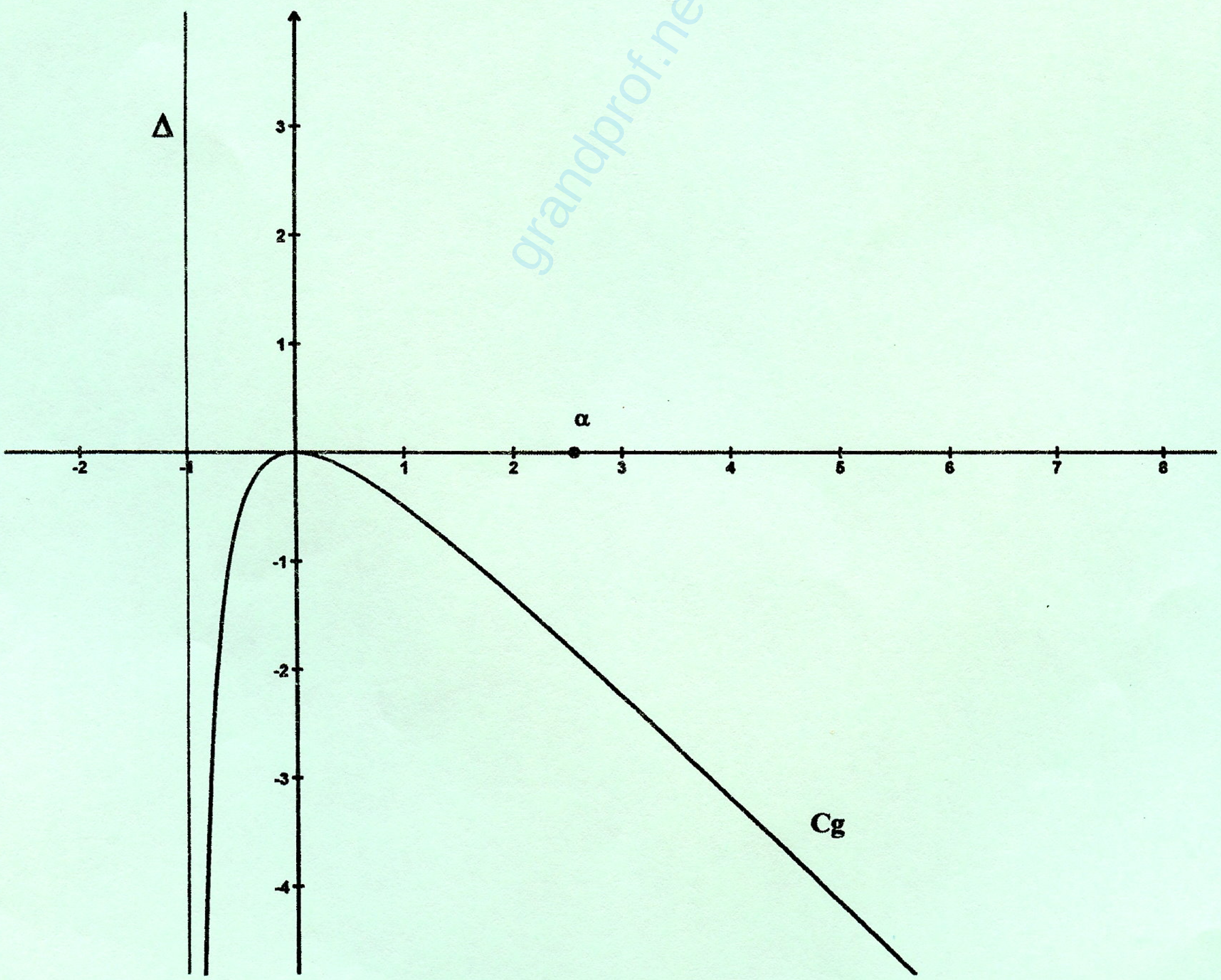


Figure 2