RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Sciences techniques**	
	Durée : **3 h**	Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session principale**	

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points $A(1,0,2)$, $B(-2,1,-1)$ et $C(0,0,1)$.

1) a - Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b - Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est $x-z+1=0$.

2) On considère les points $I(1,-1,-1)$ et $J(-\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2})$ et soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire à P.

a- Montrer que la droite Δ coupe le plan P en J.

b- Calculer la distance IJ.

3) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace vérifiant : $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z-2=0$.

a- Montrer que S est une sphère de centre I et de rayon R que l'on déterminera.

b- Montrer que le plan P coupe la sphère S suivant le cercle de centre J et de rayon $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4) Pour $\theta\in[0,2\pi[$, on considère le point $N(1+\cos\theta,\ -1+\sin\theta,\ -3)$.

a- Vérifier que N est un point de la sphère S.

b- Justifier que le point N n'appartient pas au plan P.

c- Montrer que $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AN}=-5-\cos\theta$.

d- En déduire la valeur de θ pour laquelle le volume du tétraèdre ABCN est minimal.

Exercice 2 **(4 points)**

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$(E): z^2-(1+i\sqrt{3})z-2+2i\sqrt{3}=0.$

1) a- Vérifier que $(3-i\sqrt{3})^2=6-6i\sqrt{3}.$

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

a- Construire le cercle (C) de centre O et passant par le point A d'affixe 2.

On désigne par B et C les points du plan d'affixes respectives $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=\overline{b}$.

b- Mettre chacun des nombres complexes b et c sous la forme exponentielle.

c- En déduire que les points B et C appartiennent au cercle(C).

d- Construire alors les points B et C.

3) a- Montrer que $\dfrac{c}{b-2}=\dfrac{2}{c-b}=i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b- En déduire que le point O est l'orthocentre du triangle ABC.

Exercice 3 **(6 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)\,e^{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a - Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b - Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c - Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

2) a - Montrer que pour tout réel x, on a : $f'(x)=-x\ e^{1-x}$.

b - Dresser le tableau de variation de f.

3) a - Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

b - Soit T la tangente à la courbe (C) au point I.

Montrer que T a pour équation cartésienne $y=-x+3$.

4) Construire la courbe (C) ainsi que sa tangente T . (on prendra $e\simeq 2,7$)

5) Soit α un réel strictement supérieur à (-1).

On pose $I(\alpha) = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\, dx$.

a - Donner une interprétation graphique de l'intégrale $I(\alpha)$.

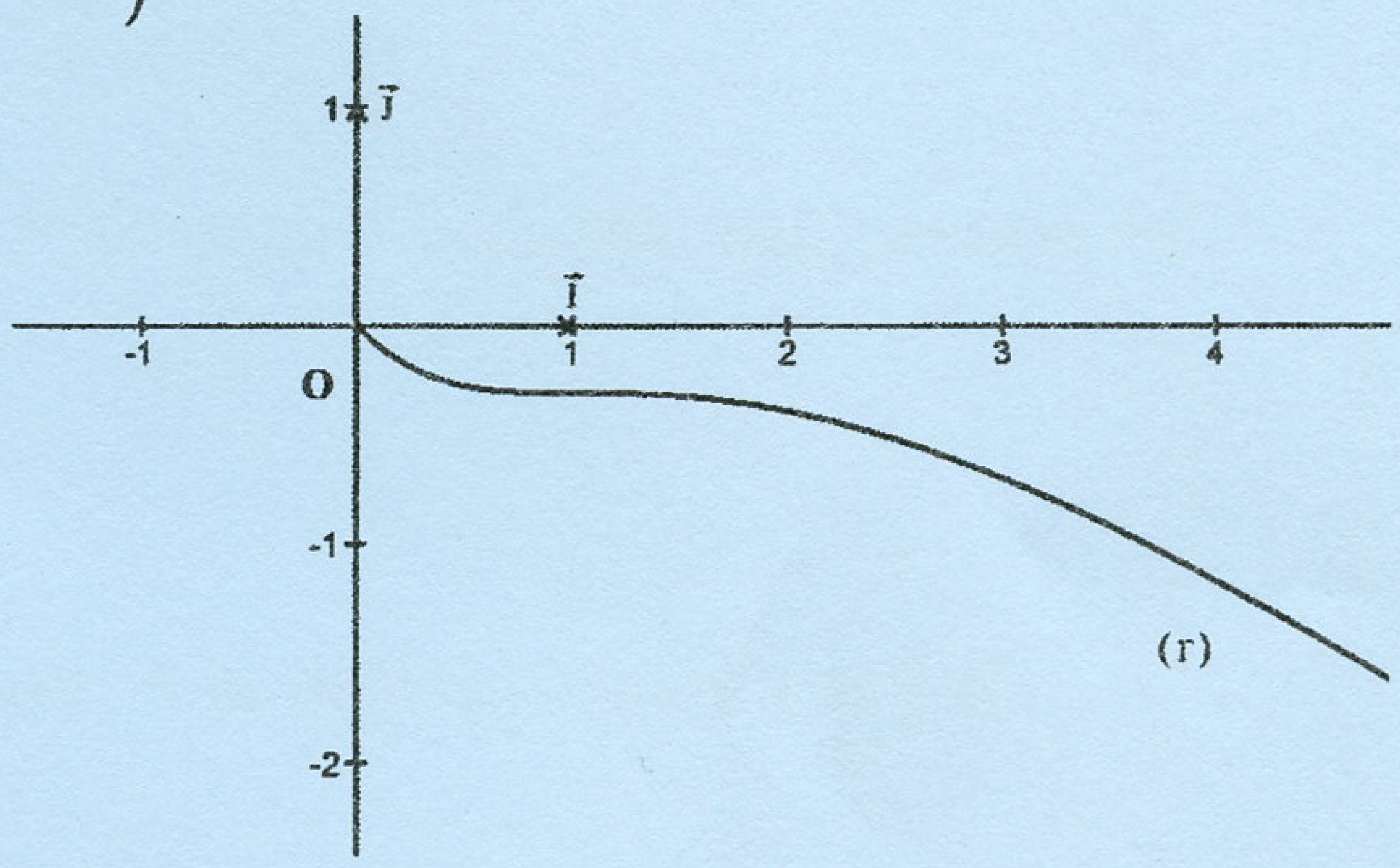
b - Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = f''(x) + 2e^{1-x}$.

c - En déduire que $I(\alpha) = e^2 - (2+\alpha)e^{1-\alpha}$.

d - Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I(\alpha)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 (5 points)

1) La courbe (Γ) ci-contre, est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = -x + \ln(1+x^2)$.



(Γ) coupe l'axe des abscisses uniquement en O.

Par une lecture graphique, justifier que :

pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ on a : $\ln(1+x^2) \le x$.

2) On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + U_n{}^2\right), \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n > 0$.

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} \le \dfrac{1}{2} U_n$.

c- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \le \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

d- Déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

3) Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots\cdots + U_n$.

a- Montrer que la suite (S_n) est strictement croissante.

b-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $S_n \le 3 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

c- Déduire que la suite (S_n) est convergente.