



Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

**Exercice 1 : ( 5 points)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) a) Vérifier que :  $-7 - 4i\sqrt{2} = (1 - 2i\sqrt{2})^2$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + z + 2 + i\sqrt{2} = 0$ .

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = -i\sqrt{2}$ ,  $z_B = -1 + i\sqrt{2}$  et  $z_C = \overline{z_A}$ .

Montrer que C est un point du cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AB]$ .

3) A tout point M du plan d'affixe  $z$  distinct de chacun des points A et B, on associe le point M'

d'affixe  $z'$  tel que  $z' = \frac{z + 1 - i\sqrt{2}}{z + i\sqrt{2}}$ .

a) Montrer que si l'affixe  $z'$  du point M' est imaginaire pur, alors M appartient au cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AB]$ .

b) Montrer que si  $|z'| = 1$ , alors M est un point de la médiatrice  $\Delta$  du segment  $[AB]$ .

4) Soit E le point d'affixe  $z_E = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}i$  et E' le point d'affixe  $z_{E'} = \frac{z_E + 1 - i\sqrt{2}}{z_E + i\sqrt{2}}$ .

a) Montrer que  $z_{E'} = -i$ .

b) Déduire l'affixe de chacun des deux points d'intersection de la droite  $\Delta$  et du cercle  $(\mathcal{C})$ .

**Exercice 2 : ( 5 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points A(0, -1, 0), B(1, 1, 0) et C(0, 0, 1).

1) a) Déterminer les composantes du vecteur  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ .

b) En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est :  $2x - y + z - 1 = 0$ .

2) On considère le plan  $Q: x + y - 2z + 1 = 0$ . Montrer que les plans P et Q sont sécants et que leur

intersection est la droite  $\Delta: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5\alpha - 1 \\ z = 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ .

3) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  vérifiant :  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + \frac{4}{3} = 0$ .

a) Montrer que S est une sphère de centre le point  $I(-1, 0, 1)$ . Déterminer son rayon.

b) Montrer que la sphère S est tangente à chacun des plans P et Q.

4) Soient J et K les points de contact respectifs de la sphère S avec les plans P et Q.

a) Justifier que le plan (IJK) est perpendiculaire à chacun des plans P et Q.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est :  $x + 5y + 3z - 2 = 0$ .

c) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des plans P, Q et (IJK).

### Exercice 3 : ( 4 points)

Une entreprise fabrique deux types de circuits électriques, 40% sont de type A et 60% de type B.

Des statistiques ont prouvé que :

2% des circuits de type A présentent un défaut.

1% des circuits de type B présentent un défaut.

1) On choisit un circuit au hasard et on désigne par A, B et D les évènements :

A : « le circuit est de type A »

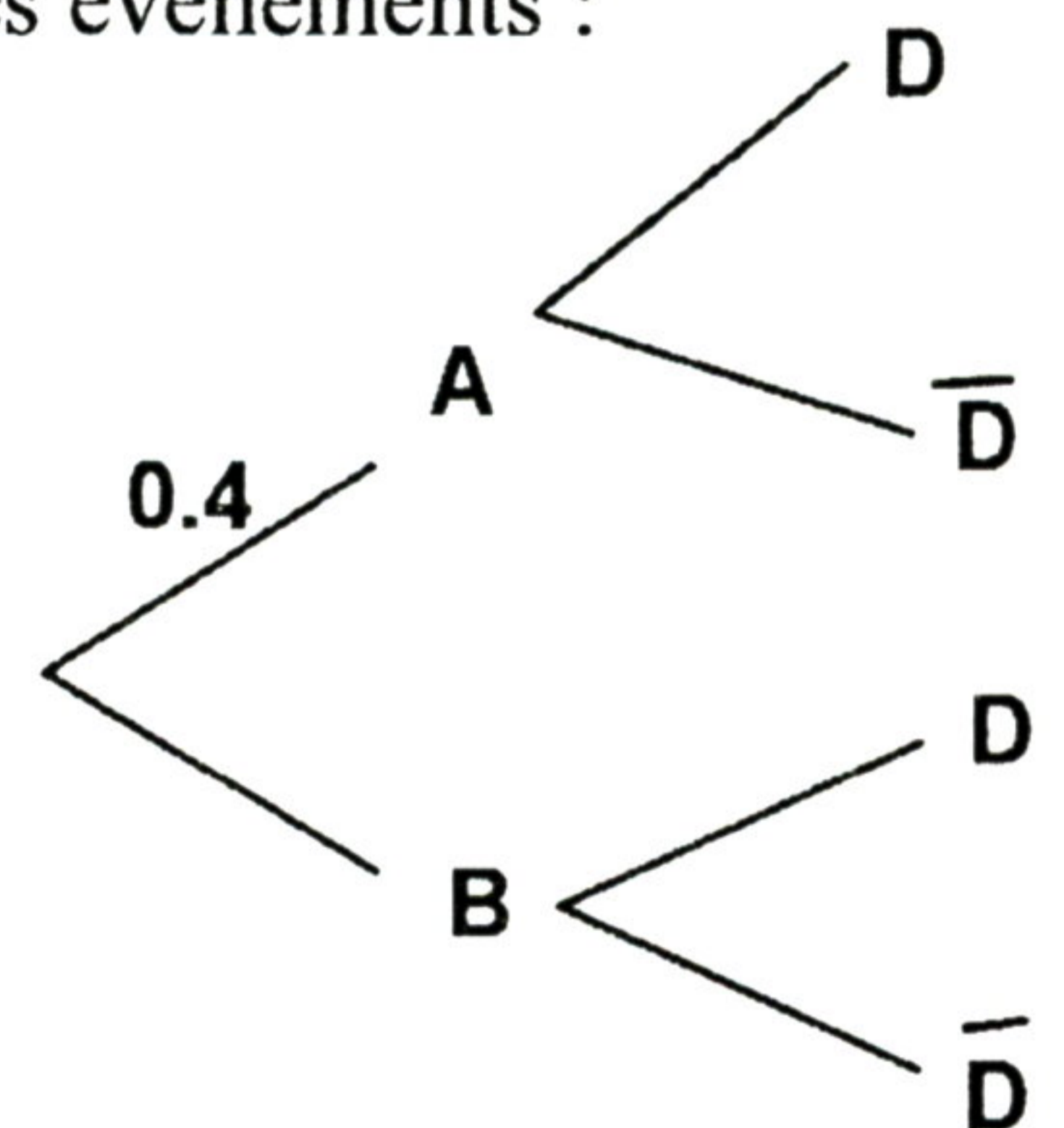
B : « le circuit est de type B »

D : « le circuit présente un défaut ».

a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre :

b) Montrer que  $p(D) = 0,014$

c) Un circuit choisi au hasard présente un défaut.



Quelle est la probabilité qu'il soit de type A ? (on arrondira le résultat à  $10^{-3}$  près).

2) L'usine fabrique chaque semaine 10000 circuits. Tous les circuits sans défaut sont vendus et fournissent chacun un bénéfice net de  $0,3DT$ . Les circuits avec défaut sont détruits mais font perdre chacun  $0,5DT$  à l'entreprise (matière première et coût de fabrication).

Déterminer le bénéfice moyen réalisé chaque semaine.

### Exercice 4: ( 6 points )

- 1) Soit la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = -x + 1 - 2 \ln x$ .
- Déterminer le sens de variations de la fonction  $g$ .
  - Calculer  $g(1)$  puis déterminer le signe de  $g(x)$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .
- 2) Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ , et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.
- Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.
  - Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , on a  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ .
- b) Dresser le tableau de variations la fonction  $f$ .
- c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\beta$  et que  $\beta \in ]0,56 ; 0,57[$ .
- 4) Dans l'annexe, on a construit dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(\Gamma)$  de la fonction  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = \frac{1}{x}$  et l'unique point d'inflexion  $A$  pour la courbe  $(C)$  ainsi que la tangente à  $(C)$  en ce point.
- Etudier les positions relatives des courbes  $(C)$  et  $(\Gamma)$
  - Construire dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(C)$ .
- 5) Soit  $I_\lambda$  l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par les courbes  $(C)$  et  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = \lambda$  où  $\lambda$  est un réel strictement supérieur à 1.
- Montrer que  $I_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 + \ln \lambda)$ .
  - Déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_\lambda$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

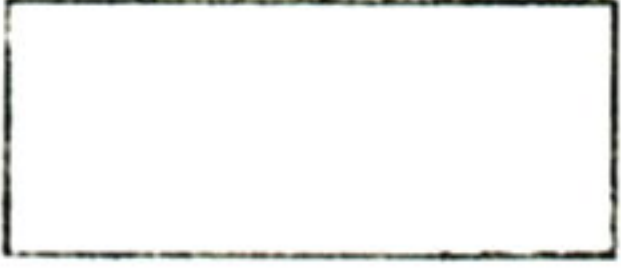
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....



**Épreuve : mathématiques – Section : Sciences Techniques**

**Feuille à rendre avec la copie**

