REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences Techniques***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1 /4 à 4/4. ***La page 4/4 est à rendre avec la copie.***

Exercice 1 (5.5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E_1): z^2+(2+i)z+i=0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^3+(1+i)z^2-2z-i=0$.
   a) Vérifier que 1 est une solution de (E).
   b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que:
   $z^3+(1+i)z^2-2z-i=(z-1)(z^2+az+b)$.
   c) En déduire dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation (E).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectifs $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z_C=1$.
   a) Mettre chacun des nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
   b) Montrer que les points A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.
   Construire les points A, B et C dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe.

4) Soient les points E et F du plan d'affixes respectives $z_E=z_A-1$ et $z_F=z_B-1$.
   a) Montrer que OEAC et OFBC sont des parallélogrammes.
   b) Construire alors E et F.
   c) Vérifier que : $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}+e^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)=e^{-i\frac{\pi}{6}}-1$ et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)=e^{i\frac{7\pi}{6}}-1$.
   d) Déduire la forme exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E_1).

Exercice 2 (4.5 points)

1) On considère la fonction f définie sur $[0,2]$ par $f(x)=\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$.

a) Vérifier que pour $x\in[0,2]$, $f'(x)=\frac{3}{4}\frac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,2]$, $x\le\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,2]$, $0 \le f'(x) \le \frac{3}{4}$.

d) Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $0 \le 2 - f(x) \le \frac{3}{4}(2-x)$.

2) Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le 2 - u_{n+1} \le \frac{3}{4}(2 - u_n)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le 2 - u_n \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

d) Calculer alors la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $2n - 4\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \le S_n \le 2n$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 3 (4 points)

Dans un atelier de réparation d'une agence de location de voitures, on dispose d'un lot contenant un grand nombre de bougies pour moteur à essence.

Le lot est constitué de 50% de bougies d'origine dont 2% sont défectueuses, le reste du lot est constitué de bougies adaptables dont 20% sont défectueuses.

On prélève au hasard une bougie du lot et on considère les deux événements suivants :

D: « la bougie prélevée est défectueuse »

O: « la bougie prélevée est d'origine »

1) a) Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et d'origine ?

b) Quelle est la probabilité pour que la bougie prélevée soit défectueuse et adaptable ?

c) Montrer que la probabilité p pour que la bougie prélevée soit non défectueuse est égale à 0,89.

2) Pour changer les bougies d'une voiture, le mécanicien prélève au hasard quatre bougies du lot. Comme le nombre de bougies est grand, on assimile ce prélèvement à un tirage successif avec remise de quatre bougies.

Quelle est la probabilité pour que les quatre bougies soient non défectueuses ?

3) La durée de vie d'une bougie non défectueuse, mesurée en kilomètre, est une variable aléatoire réelle X continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a) Sachant que la durée de vie moyenne d'une bougie est 40000 kilomètres, montrer que $\lambda = 2{,}5.10^{-5}$

b) Calculer la probabilité qu'une bougie dure entre 20000 et 40000 kilomètres.

c) Sachant qu'une bougie a duré 40000 kilomètres, calculer la probabilité pour qu'elle dure 5000 kilomètres de plus.

Exercice 4 **(6points)**

Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a construit dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative (Γ) de la fonction h définie sur $[1,+\infty[$ par: $h(x)=x-3+(x+1)e^{1-x}$ et la droite D d'équation $y=\frac{1}{e}x+1-\frac{4}{e}$ et on a placé aussi le point $I(2\ ,\ 1-2e^{-1})$.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-xe^{1-x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) Montrer que la droite $\Delta : y=1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=(x-1)e^{1-x}$.

   b) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3) a) Etudier la position relative de la courbe (C) et de la droite Δ.

   b) Montrer que la droite D est la tangente à la courbe (C) au point I.

   c) Montrer que I est un point d'inflexion pour la courbe (C).

   d) Tracer, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) et la droite Δ.

4) Pour tout $\alpha>1$, on considère A_α l'aire, en u.a, de la partie P_α du plan limitée par la courbe (C), la droite des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$.

   a) Vérifier que pour tout réel x , $f(x)=1-e^{1-x}-f'(x)$.

   b) Montrer que $A_\alpha=h(\alpha)$.

   c) Placer sur l'axe $(O,\vec{i})$ le réel α_0 pour lequel $A_{\alpha_0}=1$.

   d) Hachurer la partie P_{α_0}.

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: **Mathématiques**-Section : **Sciences techniques**-Session de **contrôle** - 2018

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

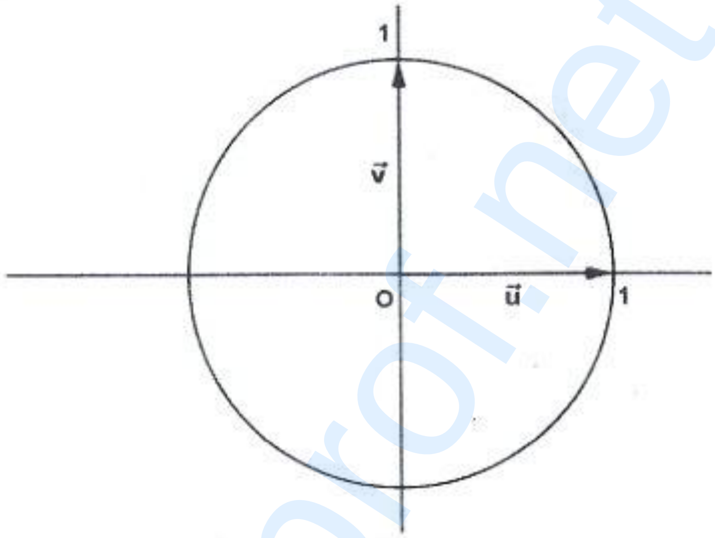

Figure 2