| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◈◈◈<br>**EXAMEN DU BACCALAUREAT**<br>SESSION DE JUIN **2014** | Epreuve : **MATHEMATIQUES**<br>Durée : 2 h<br>Coefficient : 1 |
|---|---|
| **Section : Sport** | **Session de contrôle** |

## Exercice 1 (6 points)

Soit $(V_n)$ la suite géométrique de premier terme $V_0 = \frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{4}$.

1) a) Exprimer $V_n$ en fonction de n .

b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ .

2) Soit $(U_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -\frac{23}{6} \\ U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n - 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > -4$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = -\frac{3}{4}(4 + U_n)$ .

c) En déduire que la suite $(U_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente.

3) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n = 4$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ .

## Exercice 2 (7 points)

Une urne contient neuf jetons indiscernables au toucher dont :

- quatre sont blancs et numérotés : 1 ; 2 ; 3 et 4.
- trois sont noirs numérotés : 1 ; 2 et 3.
- deux sont rouges et numérotés : 1 et 2.

Une épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément trois jetons de l'urne.
Soient les évènements :
A : « Les trois jetons tirés sont de même couleur »
B : « Les trois jetons tirés portent le même numéro »
C : « Le tirage est tricolore ».

1) a) Calculer P (A) et P (B).

b) Justifier que les événements A et B sont incompatibles.
En déduire $P(A \cup B)$

c) Vérifier que $P(C) = \frac{2}{7}$.

2) Soit la variable aléatoire X qui à chaque tirage de trois jetons, associe le nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

| $x_i$ | | | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | | | $\frac{15}{42}$ | |

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

## Exercice 3 ( 7 points )

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2xe^{-x}$. On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

   b) Donner alors une interprétation graphique de cette limite.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   b) En déduire la nature de la branche infinie de la courbe C au voisinage de $-\infty$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2(1-x)e^{-x}$.

   b) En déduire le signe de $f'(x)$.

   c) Dresser alors le tableau de variation de *f*.

4) a) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{0,\ \text{Log}\ 2\}$

   b) En déduire que la courbe C coupe la droite Δ d'équation $y=x$ en deux points dont on précisera les coordonnées.

5) Tracer la courbe C et la droite Δ.

6) a) A l'aide d'une intégration par parties, justifier que

$$\int_0^{\text{Log}\ 2} xe^{-x}dx=\frac{1}{2}\left(1-\ \text{Log}\ 2\right).$$

   b) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $x=\text{Log}\ 2$.