



**Exercice 3 (6 points)**

A) On donne dans l'annexe joint, la courbe (C) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , par :  $f(x) = e^x - 1$ .

- 1) Montrer que la droite  $\Delta : y = x$  est la tangente à (C) au point O (0,0).
- 2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle I que l'on précisera.
- 3) Tracer  $\Delta$  et la courbe (C') de la fonction réciproque  $f^{-1}$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 4) Expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout réel  $x$  de I.

B) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par :  $g(x) = e^x - 1 + \frac{1}{e^x + 1}$  et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

- 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  interpréter graphiquement ce résultat.
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ .
- 2) a) Etudier le signe de  $(f(x) - g(x))$  pour  $x$  réel, en déduire la position relative de (C) et  $(\Gamma)$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$ .
- 3) a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = \frac{e^{2x}(e^x + 2)}{(e^x + 1)^2}$ .
- b) Dresser le tableau de variation de  $g$ .
- c) Calculer  $g(0)$  puis tracer  $(\Gamma)$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .
- 4) a) Vérifier que pour tout réel  $x$ ;  $g(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ .
- b) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . Calculer  $\mathcal{A}$ .

**Exercice 4 (5 points)**

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $11x - 7y = 4$ .
  - a) Vérifier que (1,1) est une solution de l'équation (E).
  - b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Soit G l'ensemble des entiers relatifs  $n$  vérifiant :  $n \equiv 2 [11]$  et  $n \equiv 6 [7]$ 
  - a) Vérifier que 90 est un élément de G.
  - b) Soit  $n$  un élément de G, et  $(p, q)$  le couple d'entiers relatifs vérifiant
 
$$\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$$
 Montrer que le couple  $(p, q)$  est une solution de (E).
  - c) En déduire que si  $n$  appartient à l'ensemble G alors  $n \equiv 13 [77]$ .
- 3) Montrer que si  $n \equiv 13 [77]$  alors  $n$  est un élément de G.
- 4) Déterminer le plus petit élément de G supérieur à 2000.



Épreuve : MATHÉMATIQUES - Section Sciences de l'informatique ( session de contrôle 2016 )

Annexe (à rendre avec la copie)

