

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●●●● EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2017	Épreuve : <b>Mathématiques</b>	
	Section : <b>Sciences de l'informatique</b>	
	Durée : 3h	Coefficient : 3
	<b>Session de contrôle</b>	

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

### Exercice 1 (4 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1)
  - a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 1$
  - b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante
  - c) Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente
  
- 2) On considère la suite  $(v_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ 
  - a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera sa raison
  - b) Exprimer pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$
  - c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice 2 (4 points)

La probabilité qu'un autobus parte à temps est 0,85 ; la probabilité qu'il parte à temps et arrive à temps est 0,75 et la probabilité qu'il arrive à temps est 0,78.

Soient P l'événement : "L'autobus part à temps"

et A l'événement : "L'autobus arrive à temps"

- 1) Déterminer la probabilité de chacun des événements P, A et  $P \cap A$ .
- 2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
  - a)  $A_1$  : « l'autobus arrive à temps sachant qu'il est parti à temps »
  - b)  $A_2$  : « l'autobus ne parte pas à temps et arrive à temps »

3) Pour se rendre au travail le matin, un ouvrier empreinte l'autobus.

Quelle est la probabilité pour que cet ouvrier arrive en retard au plus une fois pendant les 6 jours de travail de la semaine ?

### Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$ . Soit  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $f'(x) = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}} e^{-x}$ . Préciser le signe de  $f'$

c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$  et interpréter le résultat obtenu

2) a) Dresser le tableau de variation de  $f$

b) Construire  $\mathcal{C}$

3) On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = \int_0^n f(t) dt$

a) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante

b) Montrer que pour  $t \geq 0$ ,  $8t \leq (t+2)^2$

En déduire que pour  $t \geq 0$ ,  $\sqrt{t} \leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$ .

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_0^n (t+2)e^{-t} dt$

b) Montrer alors que  $(u_n)$  est convergente et donner un encadrement de sa limite à  $10^{-1}$  près.

**Exercice 4 (6 points)**

1) On considère l'équation

$$(E_1) \quad 5x - 7y = 3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

- Vérifier que  $(2, 1)$  est une solution de  $(E_1)$
- Déterminer l'ensemble des solutions de  $(E_1)$
- Soit  $(a, b)$  une solution de  $(E_1)$ . On note  $d = \text{PGCD}(a, b)$ , préciser les valeurs possibles de  $d$
- Pour chaque valeur de  $d$  donner un exemple de solution

2) On considère l'équation

$$(E_2) \quad 5x^2 - 7y^2 = 3, \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs}$$

- Montrer que si  $x$  et  $y$  sont des multiples de 3, alors le couple  $(x, y)$  n'est pas solution de  $(E_2)$
- Montrer que si le couple  $(x, y)$  est une solution de  $(E_2)$  alors  $2x^2 \equiv y^2 [3]$
- Soit  $z$  un entier relatif, compléter les congruences suivantes:

$$\text{Si } z \equiv 1 [3] \quad \text{alors } z^2 \equiv \dots [3]$$

$$\text{Si } z \equiv 2 [3] \quad \text{alors } z^2 \equiv \dots [3]$$

- En déduire que l'équation  $(E_2)$  n'admet pas de solution.