REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences de l'informatique***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A$. En déduire que A est inversible.

2) a) Montrer que $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 3\\ -1 & -6 & 2\end{pmatrix}$

b) Vérifier que $A^3-A^2=-7\times I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

c) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

3) On considère le système (S) suivant $\begin{cases}-x-2y+z=3\\ x+y+z=7\\ 2x-y+z=1\end{cases}$ où x, y et z sont des réels

a) Écrire ce système sous forme matricielle.

b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 2 (4,5 points)

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, n boules de l'urne (n étant un entier supérieur ou égal à 2)

On considère les événements :

A : « obtenir des boules de couleurs différentes »

B : « obtenir au plus une boule blanche »

C : « obtenir n boules de même couleur »

D : « obtenir une seule boule blanche »

1) a) Montrer que $p(C)=\frac{1}{2^{n-1}}$

b) Calculer $p(D)$

2) a) Montrer que $p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

b) Montrer que $p(B)=\frac{n+1}{2^n}$

c) Vérifier que $p(A\cap B)=p(D)$

3) Soit (u_n) la suite définie pour $n\geq 2$ par : $u_n=2^{n-1}-(n+1)$

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) En déduire que u_n s'annule uniquement pour $n=3$.

4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$?

Exercice 3 (5,5 points)

1) On considère l'équation (E) : $5x-26y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que $(-5\,,-1)$ est une solution de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci – dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier n correspondant dans le tableau.
- on calcule le reste de la division euclidienne de $5n+2$ par 26 que l'on note m.
- à l'entier m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

a) Vérifier que la lettre F est « codée » B.

b) Coder le mot BAC, sachant que le codage s'effectue "lettre par lettre" et dans l'ordre.

3) a) Montrer que pour tous entiers n et m, on a :

$$5n+2\equiv m[26]\Leftrightarrow n\equiv 21m+10[26]$$

b) En déduire un procédé permettant de reconnaitre une lettre « codée »

c) Reconnaitre le mot dont le code est « UA ».

Exercice 4 (6 points)

1) On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

   a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

   c) Montrer que la restriction de f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.

3) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) On définit la suite (u_n) par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

   a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq e$

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) a) Montrer que pour tout $x\geq e$, $f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^2$

   b) En déduire que pour tout $x\geq e$, $0\leq f'(x)\leq \frac{1}{4}$

6) a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$|u_{n+1}-e|\leq \frac{1}{4}|u_n-e|$$

   b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-e|\leq \frac{1}{4^n}$

   c) Retrouver ainsi la limite de la suite (u_n).