REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◇◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION DE JUIN **2014**	Epreuve : **MATHEMATIQUES** Durée : 4 H Coefficient : 4
Section : Mathématiques	**Session de contrôle**

Le sujet comporte 4 pages. La page annexe 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (5points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 1**) , IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI] , $OA = 2OI$ et $\widehat{(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1) Déterminer h(O) et s(I).

2) Pour tout point M du plan, on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit $O' = f(O)$. Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit $I' = f(I)$. Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe z_P du point P.

b) Exprimer en fonction de z l'affixe z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point $M' = f(M)$. Montrer que $z' = \frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$.

d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Exercice 2 (5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Soit (E) l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Déterminer les cordonnées des foyers de l'ellipse (E) et donner son excentricité.

b) Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole (P) et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation $y^2 = -2|x| + 4$.

a) Vérifier que $O, \vec{j}$)est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M\left(t, \sqrt{4-t^2}\right)$ appartient à $\mathcal{C}$.

b) On pose $I_1 = \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1 = \pi$.

4) Calculer $I_2 = \int_0^2 \sqrt{-2t+4}\,dt$.

5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse (E).

Exprimer $\mathscr{A}$ en fonction de I_1 et I_2 puis calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 3 (4points)

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111x - 10^4 y = 1$.

a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E) .

b) Résoudre l'équation (E) .

2) Soit n un entier .

a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n=1111p$ et $n=1+q10^4$

alors (p, q) est une solution de (E).

b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$.

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 4 (6points)

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = e^{f(x)} \text{ si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue à droite en 0.

b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3) Dans l'annexe ci-jointe (**Figure 3**), on a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées $(e, g(e))$.

b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1.

c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = g(n) \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$

a) Donner la limite de (u_n).

b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.

Section : ……………………… N° d'inscription : ………………… Série : …………

Nom et prénom : ……………………………………………………………………

Date et lieu de naissance : …………………………………………………………

Signatures des surveillants

…………………

…………………

Epreuve : Mathématiques (Section mathématiques)

Annexe (à rendre avec la copie)

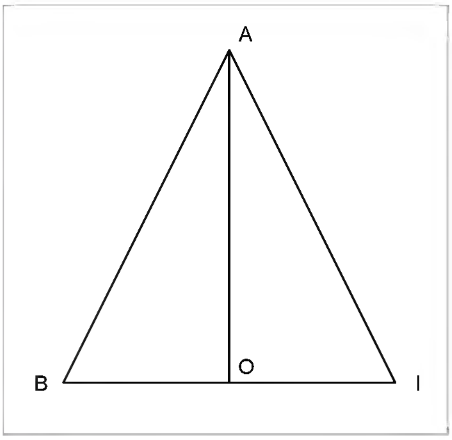

Figure 1

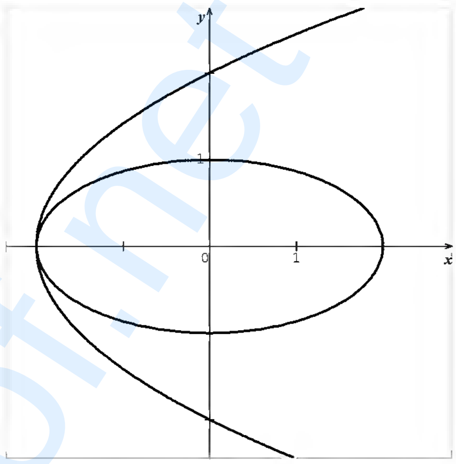

Figure 2

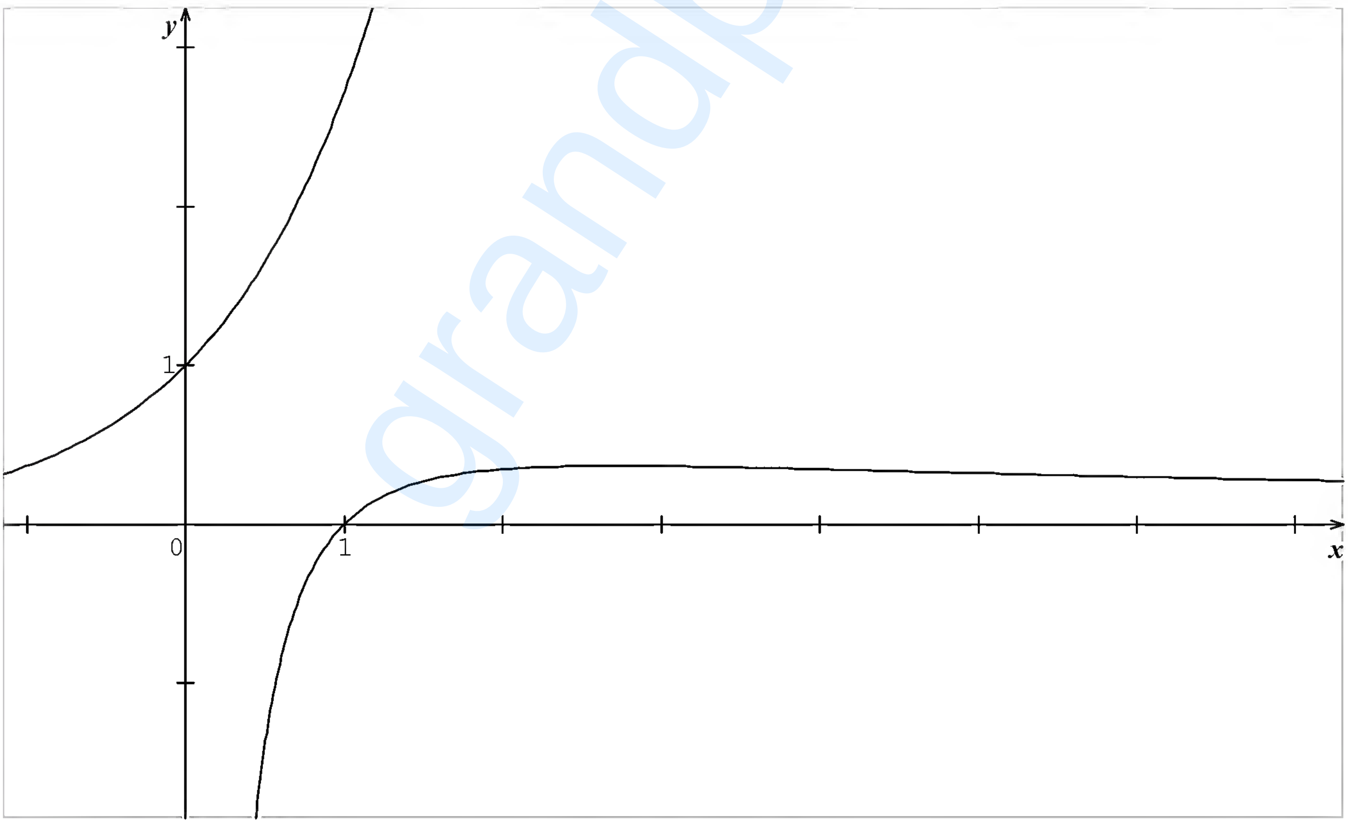

Figure 3