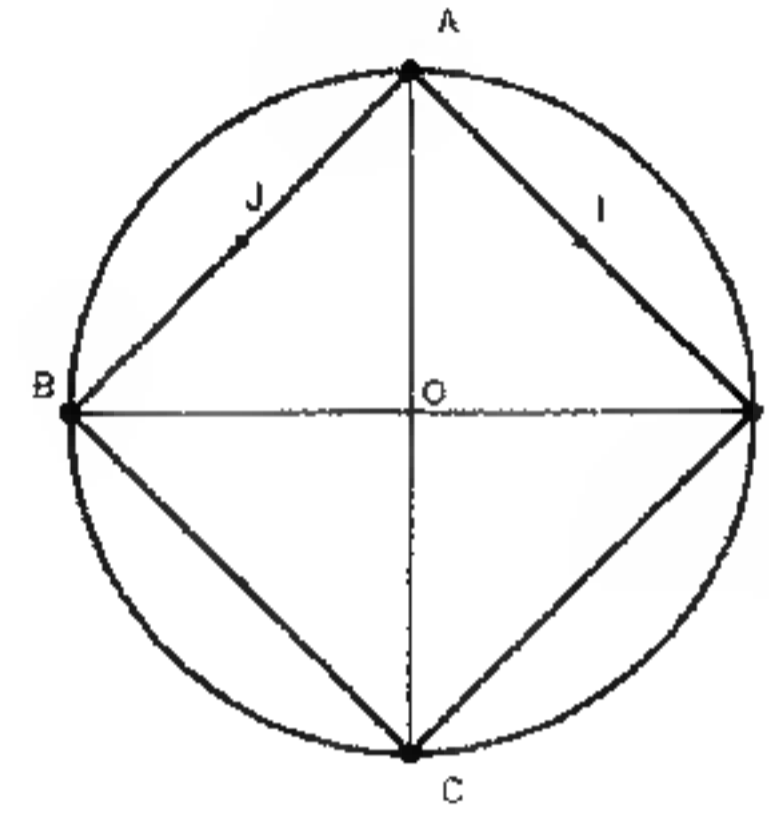


| | |
|---|--------------------------------|
| REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◆◆◆ EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION 2015 | Epreuve : MATHEMATIQUES |
| | Durée : 4 H |
| | Coefficient : 4 |
| Section : Mathématiques | Session de contrôle |

Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle (C) de centre O, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].

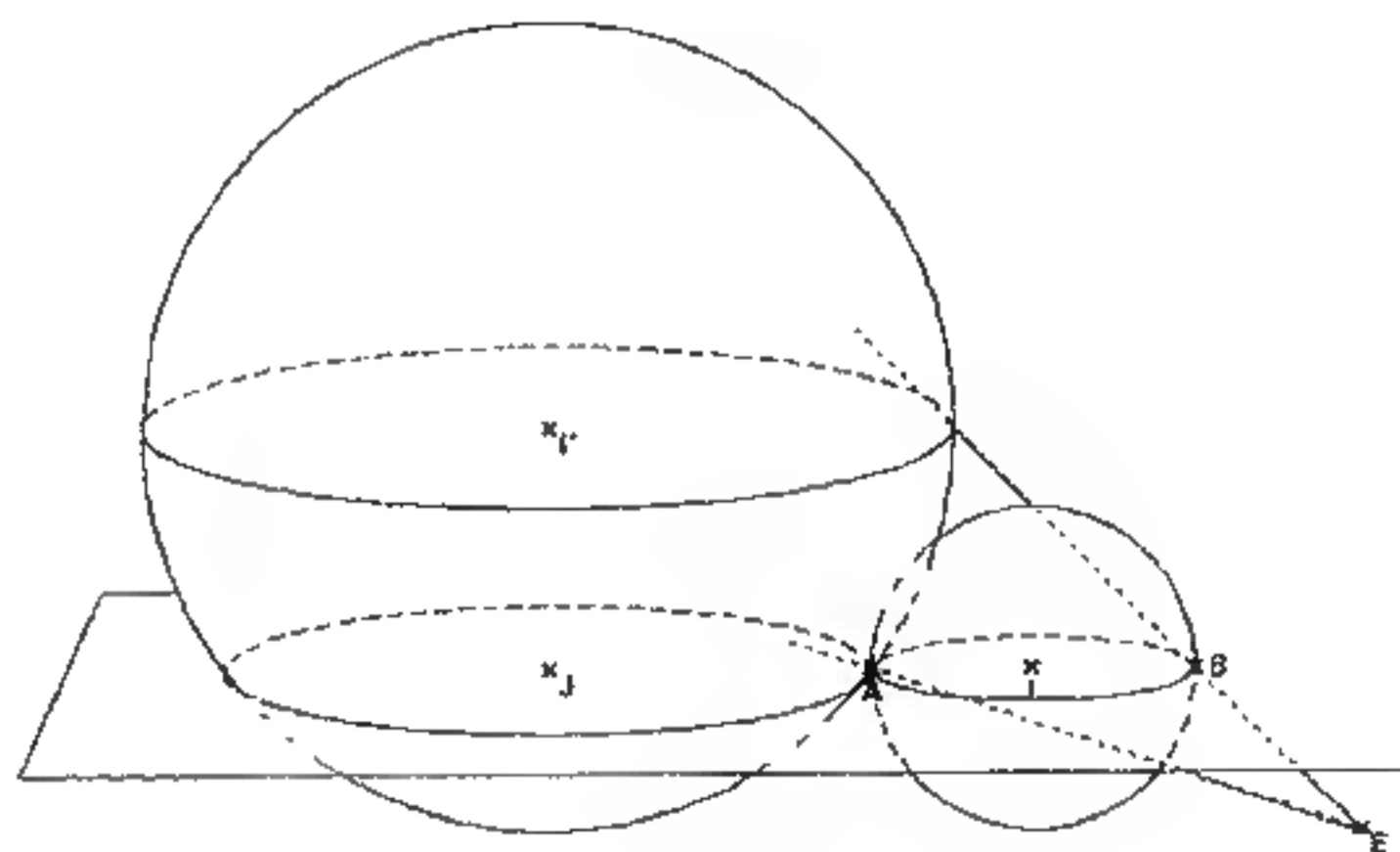


- 1) Soit f la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.
 - a) Justifier que f est d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.
 - b) Déterminer le centre de f.
- 2) La droite (CJ) recoupe le cercle (C) en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).
 - a) Justifier que E est le milieu du segment [AH] et en déduire que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -EA^2$.
 - b) Montrer d'autre part que $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB$.
- 3) On considère la similitude indirecte g de centre E qui envoie B sur A.
 - a) Déterminer le rapport de g.
 - b) Soit O' = g(O). Justifier que le triangle O'EA est isocèle.
 - c) Montrer que O'A = AI.
- 4) Soit S = gof. Montrer que S est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice 2 (5 points)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les points A(-2, 3, 2) et B(2, 3, 2) et l'ensemble S des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.

- 1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.
- b) Montrer que [AB] est un diamètre de S.



- 2) Soit P le plan d'équation $z = 2$ et soit $J(-6, 3, 2)$.
- Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$.
 - Dans le plan P , on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4. Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .
- 3) Soit E le point de coordonnées $(4, 3, 0)$. On considère l'homothétie h de centre E , de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h .
- Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I' .
 - Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ' .
 - La droite (EA) recoupe S' en A' . Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S' . Montrer que les points E , B et B' sont alignés.

Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci-dessous donne ces dépenses Y (en 10^6 dinars) suivant le rang de l'année X .

| Rang de l'année X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dépenses Y (10^6 D) | 0.38 | 0.46 | 0.52 | 0.78 | 0.86 | 0.92 | 0.96 | 1.02 | 1.08 | 1.20 |

Dans l'annexe ci-jointe (Figure1), on a représenté dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) le nuage de points de la série (X, Y) .

- On se propose d'ajuster la série double (X, Y) par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).
 - Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
 - Soit G_1 le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de G_1 .
 - Tracer la droite (GG_1) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - Déterminer une équation de la droite (GG_1) sous la forme $y = a x + b$.
 - En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.
- On pose $Z = e^Y$ et on obtient le tableau suivant :

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Z | 1.46 | 1.58 | 1.68 | 2.18 | 2.36 | 2.51 | 2.61 | 2.77 | 2.95 | 3.32 |

- Déterminer le coefficient de corrélation r de la série (X, Z) .
- Ecrire une équation de la droite affine de Z en X par la méthode des moindres carrés. (les coefficients de la droite seront arrondis au centième).
- En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction u définie sur $]0, +\infty[$ par $u(t) = 3 \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$.

- a) Dresser le tableau de variation de la fonction u .
b) En déduire le signe de u .

2) Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x^3 [\ln(1+x) - \ln x] & \text{si } x \in]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue et dérivable à droite en 0 et calculer $f'_d(0)$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]0, 1]$, $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

II- On considère les fonctions g et h définies sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = x^3 \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = x^3 \ln x & \text{si } x \in]0, 1] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par (C_f) , (C_g) et (C_h) les courbes des fonctions f , g et h dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que la courbe (C_h) admet une tangente horizontale au point d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

2) a) Vérifier que pour tout réel x de $[0, 1]$; $f(x) = g(x) - h(x)$.

b) Donner la position relative des courbes (C_f) et (C_g) .

c) Soit T et T' les tangentes respectives à (C_f) et (C_g) aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

Montrer que T et T' sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure 2), on a tracé dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes (C_g) et (C_h) et leurs tangentes aux points d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$.

a) Construire le point de (C_f) d'abscisse $e^{-\frac{1}{3}}$ et la tangente (T) .

b) Tracer la courbe (C_f) .

4) a) Justifier que h admet une unique primitive H sur l'intervalle $[0, 1]$ qui s'annule en 1.

b) Soit $\alpha \in]0, 1]$ et $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx$. Exprimer A_α en fonction de H .

c) Calculer A_α à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire $H(0)$.

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.