

Session de contrôle Bac 2014

Section : Sc Expérimentales

Exercice 1

1) $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$ donc (S) est la sphère de centre $I(1, -1, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

2) a) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$

b) $M(x, y, z) \in (S) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3 \\ t^2 - 2t + 4 = 0 \end{cases}$ or l'équation

$t^2 - 2t + 4 = 0$ n'a pas de solution car $t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 > 0$ donc $\Delta \cap (S) = \emptyset$.

3) a) $B \notin \Delta$ donc B et Δ déterminent un plan P .

b) $0+0+3-3=0$ donc le point A appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

$3+0+0-3=0$ donc le point B appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$.

Soit $C(1, -1, 3)$ un point de Δ différent de A et $1-1+3-3=0$ donc le point C appartient au plan d'équation $x+y+z-3=0$ et puisque les points A, B et C déterminent le plan P donc P a pour équation $x+y+z-3=0$.

c) $d(I, P) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ donc P et S sont tangents en H , projeté orthogonal de I sur P .

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par I donc $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1, \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \alpha \end{cases}$

$H(x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 1 \\ z = \alpha \\ 3\alpha - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, il en résulte que $H(2, 0, 1)$.

Exercice 2

1) a) $\Delta = 2(1-i)^2 + 16i = 12i = 6(1+i)^2$.

b) $\Delta = 6(1+i)^2$, soit $\delta = \sqrt{6}(1+i)$, $z' = \frac{\sqrt{2}(1-i) + \sqrt{6}(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$ et

$z'' = \frac{\sqrt{2}(1-i) - \sqrt{6}(1+i)}{4} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}$.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}, \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6}) - i(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4} \right\}.$$

2) a) $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) $2 \left(e^{-i\frac{\pi}{4}z} \right)^2 - \sqrt{2}(1-i) \left(e^{-i\frac{\pi}{4}z} \right) - 2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}z^2} - 2e^{-i\frac{\pi}{2}z} - 2i = -2iz^2 + 2iz - 2i = -2i(z^2 - z + 1)$.

c) $\left(e^{-i\frac{\pi}{3}} \right)^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 1 = 0$,

$\left(e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2 - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) + 1 = 0$ et l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ est une

équation de second degré dans \mathbb{C} donc $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

d) D'après 2)b) z est une solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ si et seulement si $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ est une solution de (E) et puisque $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$ sont les solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$, on en déduit que

les solutions de (E) sont $e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{7\pi}{12}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}$ et comme

$\operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right) > 0$ et $\operatorname{Im} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right) > 0$ donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$ par suite

$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4} \right) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4}$.

Exercice 3

1) a) X suit une loi binomiale de paramètres 20 et 0.1.

La loi de X est donnée par $p(X = k) = C_{20}^k (0.1)^k (0.9)^{20-k}$, $k \in \{0, 1, \dots, 20\}$.

$p(A) = p(X = 0) = (0.9)^{20}$.

b) $p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - p(A) = 1 - (0.9)^{20}$.

c) Le nombre moyen des vaches qui sont atteintes par la maladie est $E(X) = 20 \times 0.1 = 2$.

2) a) les valeurs prises par Y sont $\{1, 21\}$.

$p(Y = 1) = p(A) = (0.9)^{20}$.

La loi de Y est donnée dans le tableau suivant :

$p(Y = 21) = p(B) = 1 - (0.9)^{20}$.

y_i	1	21
$p(Y = y_i)$	$(0.9)^{20}$	$1 - (0.9)^{20}$

b) $E(Y) = \sum_{i=1}^2 y_i p(Y = y_i) = 1 \times (0.9)^{20} + 21 \times (1 - (0.9)^{20}) = 18.56$.

Exercice 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

1) a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Graphiquement : (C_f) admet une branche parabolique infinie de direction celle de (O, \vec{i}) en $+\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \left(1 - \frac{x-1}{x \ln x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{x-1}{x \ln x}\right) = -\infty$.

2) a) $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\\ x \mapsto \frac{x-1}{x} \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\end{array} \right.$, il en résulte que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

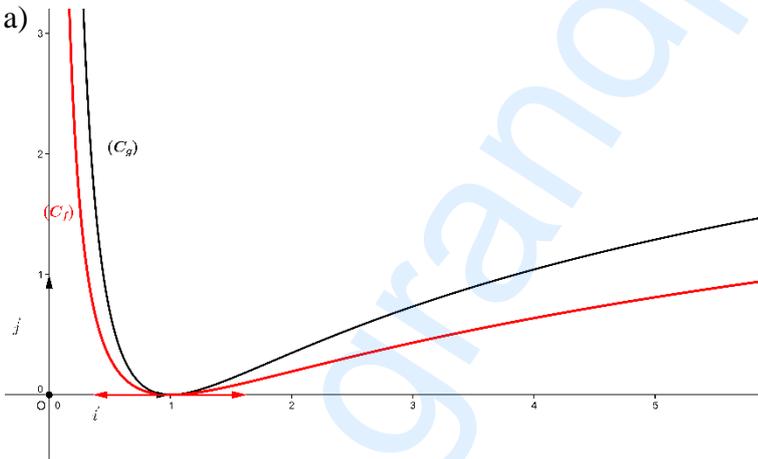
b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $x-1$ ($x-1=0 \Leftrightarrow x=1$)

x	0	1	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

3) a) La fonction $g - f$ admet un minimum global sur $]0, +\infty[$ égal à 0 donc pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $g(x) - f(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq f(x)$. Il en résulte que (C_g) est au-dessus de (C_f) .

b) $M(a, f(a))$ et $N(a, g(a))$ donc $MN^2 = (g(a) - f(a))^2$, or $a > 1$ donc $0 < g(a) - f(a) < 1$ (d'après le tableau donné) d'où $0 < (g(a) - f(a))^2 < 1$, il en résulte que $MN^2 < 1$ donc $MN < 1$.

4) a)



b) pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $g(x) - f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x - \ln x + \frac{x-1}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x - \ln x + \left(1 - \frac{1}{x}\right)$
 $= \ln x - \frac{\ln x}{x} - \ln x + 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

c) $A = \int_1^e (g(x) - f(x)) dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[x - \ln x - \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \left(e - \frac{5}{2}\right) \text{ua.}$