

# Session principale Bac 2014

## Section : Sc Expérimentales

### Exercice 1

1) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = 0.$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = +\infty.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x(1+e^x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x}}{-x} \right) \frac{-1}{(1+e^x)} = -\infty.$$

Graphiquement :  $(C_f)$  admet une branche parabolique infinie de direction celle de  $(O, \vec{j})$ .

2) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^x) - e^{-x}e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^{-x} - 2}{(1+e^x)^2} = -\frac{(2+e^{-x})}{(1+e^x)^2}.$

b) Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) < 0.$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	0

3) a) (T) :  $y = f'(0)x + f(0) = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}.$

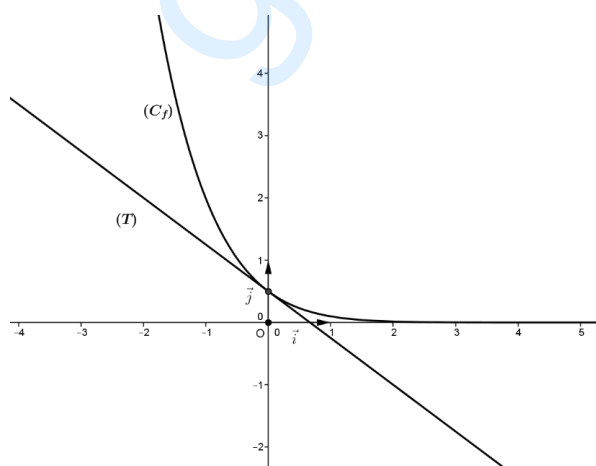
b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x) + \frac{3}{4}$	-	0	+
$f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$	0		

La fonction  $x \mapsto f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$  admet un minimum global sur  $\mathbb{R}$  égal à 0 donc pour tout réel  $x$ ,

$$f(x) + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}. \text{ Il en résulte que } (C_f) \text{ est au-dessus de } (T).$$

c)

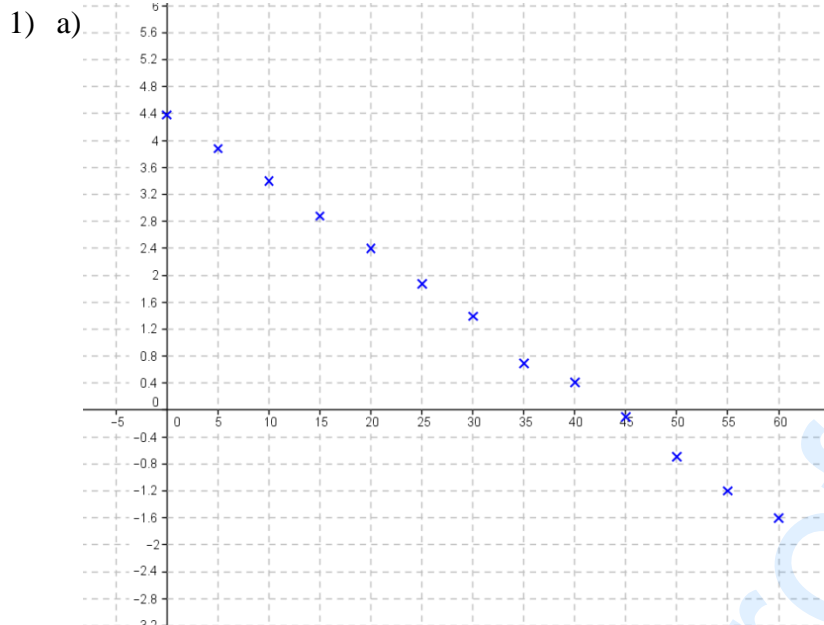


4) a) Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = f(x)$ .

b)  $A_\lambda = \int_0^\lambda f(x) dx = \int_0^\lambda \left( e^{-x} - \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \right) dx = \left[ -e^{-x} + \ln(1+e^{-x}) \right]_0^\lambda = (-e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2) \text{ua}$ .

c)  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda} + \ln(1+e^{-\lambda}) + 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2$ .

### Exercise 2



$$\rho_{t,\theta} = \frac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t \sigma_\theta} = -0,99.$$

b) Il y a une forte corrélation de plus le nuage a la forme d'une droite donc

$$|\rho_{t,\theta}| = 0,99 > \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

un ajustement affine est justifié.

2) a) (D) :  $\theta = bt + a$  avec  $b = \frac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t^2} = -0,1$  et  $a = \bar{\theta} - b\bar{t} = 4,39$ .

Il en résulte que : (D) :  $\theta = -0,1t + 4,39$ .

b)  $\theta = \ln(T - 20) \Leftrightarrow T = 20 + e^\theta = 20 + e^{-0,1t+4,39} = 20 + 80,6e^{-0,1t}$

c) Pour  $t = 90$ ,  $\theta = 20 + 80,6e^{-0,1 \times 90} = 20^\circ \text{C}$ .

d)  $T = 18 \Leftrightarrow 20 + 80,6e^{-0,1t} = 18 \Leftrightarrow e^{-0,1t} = \frac{-2}{80,6} < 0$  impossible donc la température n'atteindra jamais  $18^\circ \text{C}$ .

### Exercise 3

1) a)  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 8$  donc S est une sphère de centre O et de rayon  $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

b)  $d(O, P) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$  donc P coupe S suivant un cercle de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2} \text{ et de centre I le projeté orthogonal de O sur P.}$$

Soit D la droite perpendiculaire à P passant par O donc  $D: \begin{cases} x = t \\ y = 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

$$I(x, y, z) \in D \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \\ 6t - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I(1, 2, 1).$$

2) a)  $\begin{cases} 2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0 \\ 2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0 \end{cases}$  donc  $A \in S$  et  $A \notin P$ .

$\begin{cases} 2^2 + 2^2 + 0^2 - 8 = 0 \\ 2 + 4 + 0 - 6 = 0 \end{cases}$  donc  $B \in S$  et  $B \in P$  donc B appartient à  $(\odot)$ .

b)  $M(x, y, z) \in Q \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 \Leftrightarrow y = z.$

c)  $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$  donc P et Q sont sécants suivant une droite  $\Delta: \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}$ , on pose

$y = \alpha \in \mathbb{R}$ , on aura  $\Delta: \begin{cases} x = -3\alpha + 6 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$

3) ABC est équilatéral si et seulement si  $CA = CB = AB$ .

$CA = CB$  donc C est un point de Q et C appartient à  $(\odot)$  qui est contenu dans P donc C est un point de  $\Delta$ , il en résulte qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $C(-3\alpha + 6, \alpha, \alpha)$ .

Ainsi pour que ABC soit équilatéral, il suffit que  $CA = AB \Leftrightarrow CA^2 = AB^2 \Leftrightarrow$

$(4 - 3\alpha)^2 + \alpha^2 + (\alpha - 2)^2 = 8 \Leftrightarrow \alpha = 2$  ou  $\alpha = \frac{6}{11}$ . soit  $C(0, 2, 2)$ .

#### Exercice 4

1) a)  $z_1 + z_2 = -i\sqrt{3}$  et  $z_1 \times z_2 = -2$ .

b)  $\begin{cases} z_1 + z_2 = -i\sqrt{3} \\ z_1 \times z_2 = -2 \end{cases}$  donc  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = 0$ , il en

résulte que  $z^2 + i\sqrt{3}z - 2 = (z - z_1)(z - z_2)$  où  $z \in \mathbb{C}$ .

2) a)  $OM_1 = |z_1| = \sqrt{2}$  et  $OM_2 = |z_2| = \sqrt{2}$  donc  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent au cercle (C).

b)  $\frac{z_1 + z_2}{2} = -i\sqrt{3} = z_H$

c) Voir figure.

3) a)  $K = M * N \Leftrightarrow \frac{z + z^3}{2} = -i\sqrt{3} \Leftrightarrow z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ .

b) Il suffit de développer.

c)  $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow (z - i\sqrt{3})(z^2 + i\sqrt{3}z - 2) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$  ou  $z = z_1$  ou  $z = z_2$ .

$S_C = \{i\sqrt{3}, z_1, z_2\}$

d) Puisque  $z_1$  et  $z_2$  sont des solutions de l'équation  $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$  donc  $N_1$  et  $N_2$  sont les symétriques respectifs de  $M_1$  et  $M_2$  par rapport à  $K$ .

e)  $a$  est la troisième solution de l'équation  $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$  donc  $a = i\sqrt{3}$ .

