Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Section : Sciences expérimentales

Session principale 2016

Exercice 1

1) Les plans P et Q ont le même vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $-5 \neq 7$ alors ils sont strictement parallèles.

2) a) $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 5$. Il en résulte que S est la sphère de centre $I(1,2,1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

b) $d(I,P) = \sqrt{3} < R$, on en déduit que S et P sont sécants suivant le cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2}$

et puisque $J \in P$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P donc J est le projeté orthogonal de I sur P par suite J est le centre de $\mathscr{C}$.

c) $d(I,Q) = 3\sqrt{3} > R$, on en déduit que $S \cap Q = \varnothing$.

3) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

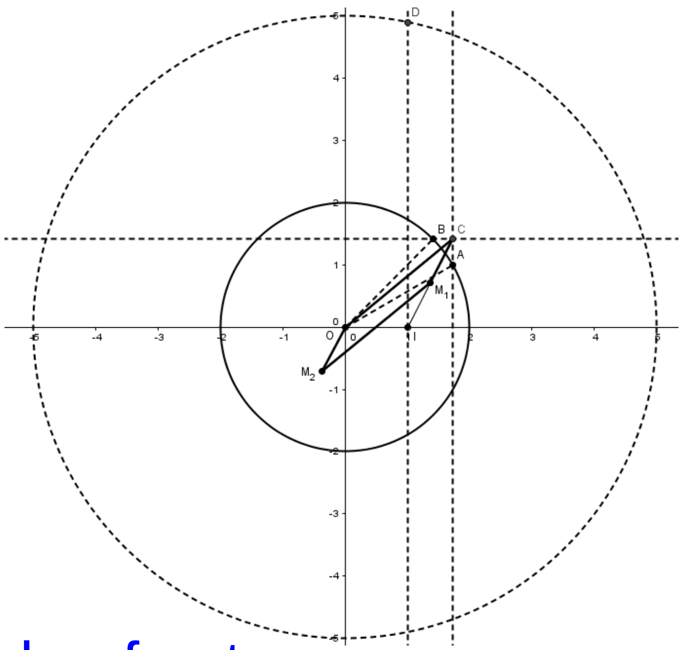
b) Soit $M(x,y,z)$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM} = 2x + 2y - 2z + 2 = 2(x + y - z + 1)$.

4) $\begin{cases} M \in S \\ V_{(ABCM)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ \dfrac{1}{6}\left|2(x+y-z+1)\right| = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in S \\ x + y - z - 5 = 0 \text{ ou } x + y - z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in (S \cap P) \cup (S \cap Q) \Leftrightarrow M \in S \cap P = \mathscr{C}$.

Exercice 2



1) a) Voir figure.

b) $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

2) a) $\begin{cases} Re(c) = Re(a) \\ Im(c) = Im(b) \end{cases}$,

on en déduit que $c = \sqrt{3} + i\sqrt{2}$.

b) $c^2 = \left(\sqrt{3} + i\sqrt{2}\right)^2 = 3 - 2 + 2\sqrt{6}i = 1 + 2i\sqrt{6}$.

3) a) $OD = \left|c^2\right| = \sqrt{1 + 24} = 5$.

b) D'une part $OD = 5$ donc D appartient au cercle de centre D et de rayon 5, d'autre part

$\mathrm{Re}\left(c^2\right) = 1$ donc D appartient à la droite
d'équation $x = 1$ d'où la construction de D.
(En tenant compte de $\mathrm{Im}\left(c^2\right) > 0$)

4) $\Delta = 4 + 8i\sqrt{6} = 4c^2$. Soit $\delta = 2c$.

$z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2}$.

5) a) $z_1 = \dfrac{1+c}{2}$, il en résulte que M_1 est le milieu de [IC].

b) $c = z_1 - z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{M_2M_1}$. On en déduit que OCM_1M_2 est un parallélogramme.

c) Voir figure.

Exercice 3

A.

1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}\left(2x\ln x - x^2 + 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{2\ln x}{x} - 1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x} - 1 + \dfrac{1}{x^2} = -1$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln x + \dfrac{1}{x} = +\infty$, il en résulte que $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction celle de la droite $\Delta : y = x$.

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 - \dfrac{1}{x^2} = -\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} + 1\right) = -\left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}\right)^2 = -\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$.

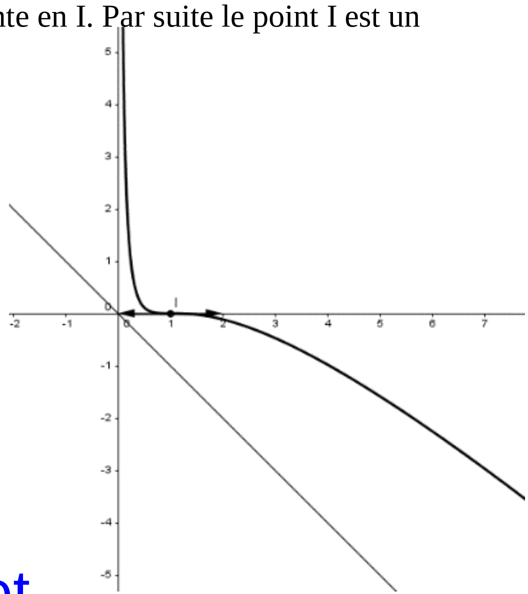
b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) \geq 0$ de plus
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$		$-\infty$

c) $f(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

d) $f'(1) = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet au point $I(1,0)$ une tangente horizontale de plus la fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $\mathscr{C}$ traverse sa tangente en I. Par suite le point I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.



3) a) Voir figure.

b) $A = \int_1^e |f(x)|dx = -\int_1^e f(x)dx = -\left[2(x\ln x - x) - \dfrac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e$

$= \dfrac{e^2 - 7}{2}$ (ua).

4) a) $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=2\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)-\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

$=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

b) Puisque pour tout $x>0, \sqrt{1+\frac{1}{x}}>1$ et f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, il en résulte que $f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\leq 0$ ou encore $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\leq 0 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\leq\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}}$.

B.

1) $u_3=\sum_{k=1}^{3}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln^2 2+\ln^2\left(\frac{3}{2}\right)+\ln^2\left(\frac{4}{3}\right)=0,726.$

2) a) $u_{n+1}-u_n=\ln^2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>0$ car $(1+\frac{1}{n+1}>1)$ par suite la suite (u_n) est croissante.

b) $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}$..

c) On a $\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\leq\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ alors $\sum_{k=1}^{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$.

Il en résulte que $u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$

d) On a $u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}<1$. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 alors la suite (u_n) est convergente vers un réel L.

Pour $n\geq 3$, $u_3\leq u_n\leq 1-\frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n+1}=1$ alors $0.7<0.726\leq L\leq 1$..

Exercice 4

1) a) $r=-0.97$.
   b) D : y = -2.64x + 34.66.
   c) Pour x = 10, on obtient y = -2,64.10 +34,66 = 8.26.

2) a) $Z=\ln y=-0.11x+3.57 \Leftrightarrow y=e^{-0.11x+3.57} \Leftrightarrow y=e^{3.57}e^{-0.11x} \Leftrightarrow y=35.52e^{-0.11x}$.
   b) Pour x=10, on obtient y = $35.52.e^{-1.1}\approx 11,82$.

3) L'allure du nuage est proche de l'allure de (C) et n'a pas l'allure d'une droite alors le deuxième ajustement est plus adapté.