

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session de contrôle 2017

**Exercice 1 :**

De quoi s'agit-il ?

- **Produit vectoriel, volume d'un tétraèdre**
- **Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace**
- **Sphère : Caractérisation**
- **Positions relatives d'une sphère et d'un plan**

$$1^{\circ}) \text{ a) } \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}. \text{ Ainsi } E(3,3,3).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG} = 3\vec{i} + 3\vec{k}. \text{ Ainsi } D(3,0,3).$$

$$\text{b) } \Rightarrow \Omega = C * D \text{ signifie } \Omega \left( \frac{x_C + x_D}{2}, \frac{y_C + y_D}{2}, \frac{z_C + z_D}{2} \right) \text{ donc } \Omega \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right).$$

$$2) \text{ a) } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } V_{(O A E G)} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{AO}| \text{ avec } \overrightarrow{AO} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} |-27 + 0 + 0| = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

$$3) \text{ a) } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (CD)$$

Donc  $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{CD}$ , d'où  $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires, ainsi  $P \perp (CD)$ .

$$\text{b) Soit } P' : x - y - z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3 - 0 + 0 - 3 = 0 \text{ donc } A \in P'.$$

$$\Rightarrow 3 - 3 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } E \in P'.$$

$$\Rightarrow 0 - 0 + 3 - 3 = 0 \text{ donc } G \in P'.$$

Or  $(AEG) = P = P'$ , ainsi  $P : x - y + z - 3 = 0$ .

$$\text{Autrement : } \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } P, \text{ donc } P : 9x - 9y + 9z + d = 0,$$

$$\text{Or } A(3,0,3) \in P \text{ signifie } 9 \times 3 - 9 \times 0 + 9 \times 3 + d = 0 \text{ signifie } d = -27$$

$$\text{Donc } P : 9x - 9y + 9z - 27 = 0 \text{ signifie } P : x - y + z - 3 = 0.$$

$$4) \text{ a) } (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$$

$$\text{signifie } (S) : \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = -6 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

signifie  $(S): \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ .

Ainsi (S) est une sphère de centre  $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

b)  $\Omega\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ,  $P: x - y + z - 3 = 0$  donc  $d(\Omega, P) = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$d(\Omega, P) = R$ . Ainsi (S) et P sont tangents en H.

Soit  $H(x, y, z)$  le projeté orthogonal de  $\Omega$  sur P.

$$\text{Signifie } \begin{cases} H \in P \\ H \in D\left(\Omega, \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
  

$$\text{signifie } \begin{cases} \frac{3}{2} + \alpha - \frac{3}{2} + \alpha + \frac{3}{2} + \alpha - 3 = 0 \\ x = \frac{3}{2} + \alpha \\ y = \frac{3}{2} - \alpha \\ z = \frac{3}{2} + \alpha \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ x = 2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{Ainsi } H(2, 1, 2)$$

## Exercice 2 :

De quoi s'agit-il ?

- Racines cubiques d'un nombre complexe donné
- Construction de points  $M(z)$  sachant  $|z|$  et  $\arg(z)$
- Complexe et géométrie

A/

1) a)  $(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .

b)  $Z^3 = 2\sqrt{2}i = (\sqrt{2})^3 e^{i\frac{\pi}{2}}$  signifie  $Z = 2\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)}$  avec  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

Signifie  $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$  ou  $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$  ou  $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ .

Ainsi les racines cubiques du nombre complexe  $2\sqrt{2}i$  sont

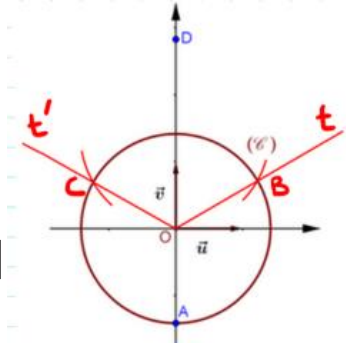
$$Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}; \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} \quad \text{et} \quad Z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

$$2) \text{ a) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B| = \sqrt{2} \\ \arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie  $B \in \zeta \cap [Ot)$  où  $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_C| = \sqrt{2} \\ \arg(z_C) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C \in \zeta_{(0, \sqrt{2})} \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

signifie  $C \in \zeta \cap [Ot')$  où  $(\vec{u}, \overrightarrow{Ot'}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$ .



$$\text{b) } \Rightarrow z_B = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Autrement : } \Rightarrow z_C = \sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2} e^{i\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}} = -\overline{z_B}$$

$$= -\overline{\left( \frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)} = -\left( \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \Rightarrow z_{\overline{BC}} = z_C - z_B = -\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow z_{\overline{AD}} = z_D - z_A = 3\sqrt{2}i$$

$$\text{Donc } \frac{z_{\overline{AD}}}{z_{\overline{BC}}} = -\sqrt{3}i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{BC} \perp \overline{AD}. \text{ Ainsi } (BC) \perp (AD).$$

Autrement :  $z_C = -\overline{z_B}$  signifie  $S_{(0, \vec{v})}(B) = C$  signifie  $(O, \vec{v}) \perp (BC)$

Or  $(O, \vec{v}) = (AD)$ , Ainsi  $(BC) \perp (AD)$ .

$$\text{d) } \Rightarrow z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}i = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z_{\overline{BD}} = z_D - z_B = 2\sqrt{2}i - \frac{\sqrt{6}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Donc  $z_{\overline{AC}} = z_{\overline{BD}}$ , d'où ABDC est un parallélogramme de plus  $(BC) \perp (AD)$  ;

Ainsi ABDC est un losange.

$$\text{B/ 1) a) } \Rightarrow z_N^3 = \left( \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^3 = \alpha^3 e^{i2\pi} = \alpha^3$$

$$\Rightarrow z_P^3 = \left( \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)^3 = \alpha^3 e^{-i2\pi} = \alpha^3$$

$$\text{b) } \Rightarrow z_N^3 = z_P^3 = \alpha^3$$

Donc les racines cubiques du nombre complexe non nul  $\alpha^3$  sont  $z_N, z_P$  et  $z_M$

et comme les points images des racines cubiques d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un triangle équilatéral, ainsi MNP est un triangle équilatéral.

2) a)  $\Rightarrow$  MNQP est un losange signifie MNQP est un parallélogramme et  $MN = MQ$  signifie MNQP est un parallélogramme (car MNP est un triangle équilatéral)

signifie  $z_{\overline{MN}} = z_{\overline{PQ}}$  signifie  $z_N - z_M = z_Q - z_P$  signifie  $z_Q = -z_M + z_P + z_N$

signifie  $\alpha^3 = -\alpha + \alpha e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + \alpha e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$  signifie  $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \left( e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} \right)$

signifie  $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$  signifie  $\alpha^3 = -\alpha + \alpha \times 2 \left(-\frac{1}{2}\right)$

signifie  $\alpha^3 = -2\alpha$ .

b)  $\Leftrightarrow$  MNQP est un losange signifie  $\alpha^3 = -2\alpha$  signifie  $\alpha(\alpha^2 + 2) = 0$

signifie  $\alpha^2 + 2 = 0$  car  $\alpha \in \mathbb{C}^*$

signifie  $\alpha^2 = -2$  signifie  $\alpha = i\sqrt{2}$  ou  $\alpha = -i\sqrt{2}$ .

### Exercice 3 :

De quoi s'agit-il ?

- Fonction en logarithme népérien : limites, variations, représentations graphique
- Fonction réciproque
- Résolution d'équations

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$  et  $\ln(x+1) > 0$  pour tout  $x > 0$  donc  $\lim_{0^+} f = -\infty$ .

Ainsi l'axe des ordonnées est une asymptote à ( $\mathcal{C}$ ).

b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(x\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln(x+1)$ .

$$c) \lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty, \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 0. \text{ Ainsi } \lim_{+\infty} f = 1.$$

La droite  $\Delta : y = 1$  est une asymptote à ( $\mathcal{C}$ ) au voisinage de  $+\infty$ .

2) a) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \ln(x)}{\ln^2(x+1)} \times \frac{x(x+1)}{x(x+1)}$

$$= \frac{(x+1)\ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x\ln(x+1) + \ln(x+1) - x\ln(x)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

$$= \frac{x(\ln(x+1) - \ln(x)) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}.$$

b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{x \left( \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x) \right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$

$$= \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$$

Or pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $1 + \frac{1}{x} > 1$  et  $x+1 > 1$

Donc  $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) > 0$  et  $\ln(x+1) > 0$

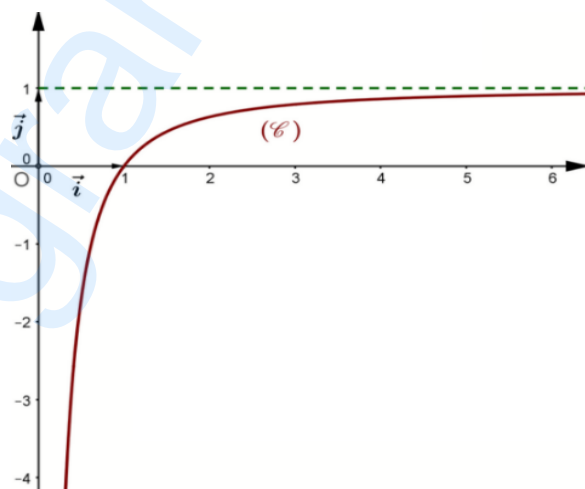
Ainsi  $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) > 0$  et  $x(x+1)\ln^2(x+1) > 0$ .

Donc pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $f'(x) > 0$  Par suite  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ .

c)

$x$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f$	$-\infty$	$1$

d)



3)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $]0, +\infty[$ , donc elle réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[) = ]-\infty, 1[$ .

Ainsi  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $]-\infty, 1[$ .

4) a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 1$  car  $f^{-1}$  est continue en 0, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ .

b) pour tout  $n \geq 2$ ;  $a_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$  signifie  $f(a_n) = \frac{1}{n}$

signifie  $\frac{\ln(a_n)}{\ln(a_n + 1)} = \frac{1}{n}$

signifie  $n \ln(a_n) = \ln(a_n + 1)$

signifie  $\ln((a_n)^n) = \ln(a_n + 1)$

signifie  $(a_n)^n = a_n + 1$ .

Ainsi  $a_n$  est une solution de l'équation :  $x^n = x + 1$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + 1) = 2$ .

#### Exercice 4 :

De quoi s'agit-il ?

- Lecture graphique
- Détermination d'une fonction solution d'une équation différentielle
- Modélisation

1) a)  $f(0) = 0$ ;  $f'(0) = \frac{+1}{+2} = \frac{1}{2}$ .

b)  $f$  est solution de l'équation  $y' = ay + b$  donc  $f'(x) = af(x) + b$ , pour tout réel  $x$ .

d'où  $f'(0) = af(0) + b$  ainsi ;  $b = f'(0) = \frac{1}{2}$ .

2) a)  $f$  solution de l'équation :  $y' = ay + \frac{1}{2}$

Donc  $f'(x) = af(x) + \frac{1}{2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Signifie  $af(x) = f'(x) - \frac{1}{2}$  signifie  $f(x) = \frac{1}{a} \left( f'(x) - \frac{1}{2} \right)$  car  $a \neq 0$ .

Ainsi pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(x) = \frac{1}{a} \left( f'(x) - \frac{1}{2} \right)$ .

**b)**  $S$  est l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C})$ ; l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 4$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } S &= \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{a} \left( f'(x) - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{1}{a} \left[ f(x) - \frac{1}{2}x \right]_0^4 \\ &= \frac{1}{a} (f(4) - 2 - (f(0) - 0)) = \frac{1}{a} (2 - 2e^{-1} - 2) = \frac{-2e^{-1}}{a}. \end{aligned}$$

**c)** On a  $S = \frac{-2e^{-1}}{a} = 8e^{-1}$  signifie  $a = \frac{-2e^{-1}}{8e^{-1}} = -0,25$ .

**3)**  $f$  solution de l'équation différentielle  $y' = -0,25y + \frac{1}{2}$

$$\text{Donc } f(x) = ce^{-0,25x} - \frac{\frac{1}{2}}{-0,25} = ce^{-0,25x} + 2.$$

Or  $f(0) = 0$  signifie  $c + 2 = 0$  signifie  $c = -2$

Ainsi  $f(x) = 2 - 2e^{-0,25x}$ .

**4) a)**  $h(3) = 2 - 2e^{-0,25 \times 3} = 2 - 2e^{-0,75} \approx 1,05\text{m}$ .

Donc la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines est à peu près de 1,05m.

**b)**  $h(t) > 1,98$  signifie  $2 - 2e^{-0,5t} > 1,98$  signifie  $2e^{-0,5t} < 0,02$  signifie  $e^{-0,5t} < 0,01$

$$\text{signifie } -0,5t < \ln(0,01) \text{ signifie } t > -\frac{\ln(0,01)}{0,5} \approx 18,42.$$

Ainsi, au cours de la dix-neuvième semaine une plante de maïs dépassera 198 cm.