Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences expérimentales*)

Session principale 2017

Exercice n°1 :

De quoi s'agit -il ?

- **Produit vectoriel dans l'espace**
- **Droites et plans de l'espace**
- **Sphère, positions relatives d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère**
- **Droite tangente à un cercle**

1°) a) $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$,

Donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 2\\4 & -8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 2\\-2 & 2\end{vmatrix}\vec{k} = 8\,\vec{i} + 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$.

Ainsi $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$.

b) $O\in P\bigcap(OA)$ ①

$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de P, or $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OA}$, donc $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires, d'où $\overrightarrow{OA}\perp P$ ②

d'après ① et ② ; on conclut que (OA) est perpendiculaire au plan P en O.

c) On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix}$ ainsi,

$$d\big(O,(BC)\big)=\frac{\left\|\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{BC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{\sqrt{8^2+8^2+4^2}}{\sqrt{2^2+2^2+8^2}}=\sqrt{2}.$$

2) $x^2+y^2+z^2-4x-4y-2z-2=0$ signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2+2^2+2^2+1^2$

signifie $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=11 > 0$

Donc (S) est la sphère de centre $A(2,2,1)$ et de rayon R = $\sqrt{11}$.

3) a) $OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

b) D'après la question **1-b)**, O est le projeté orthogonal de A sur le plan P,

donc $d(A,P)$ = OA = 3 < R = $\sqrt{11}$.

Ainsi ; P coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre O et de rayon

$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{\sqrt{11}^2-3^2}=\sqrt{11-9}=\sqrt{2}$.

c) $(BC)\subset P$; $\mathcal{C}\subset P$ et $d\big(O,(BC)\big)=\sqrt{2}$ donc (BC) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.

4) **a)** On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\\-8\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BH}$,

donc $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires, ainsi $H\in(BC)$ (✶).

$OH=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}=r$ (✶✶).

D'apres (✶) et (✶✶), on conclut que $(BC)\cap\mathcal{C}=\{H\}$.

Exercice n°2 :

De quoi s'agit -il ?

- **Résolution d'une équation du second degré dans IC**
- **Complexe et géométrie**

1) **a)** $\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\sqrt{5}^2+2\times\sqrt{5}\times 2i+(2i)^2=5+4i\sqrt{5}-4=1+4i\sqrt{5}$.

b) $\Delta=\left[-\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2-4\times1\times\left(1+4i\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}+2i\right)^2-4\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2$.

c) $\Delta=-3\left(\sqrt{5}+2i\right)^2=\left[i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)\right]^2$, donc $\delta=i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)$ par suite :

$$a=\frac{\sqrt{5}+2i+i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et $$a=\frac{\sqrt{5}+2i-i\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2i\right)}{2}=\frac{\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2}=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Donc les solutions de (E) sont a et b.

2) **a)** $OQ=|z_Q|=\left|\sqrt{5}+2i\right|=\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=\sqrt{9}=3$, donc $Q\in\mathcal{C}_{(O,3)}=\mathcal{C}$.

b) $Q\in\mathcal{C}\cap\{y=2\}$, avec $\mathrm{Re}(z_A)>0$.

3) **a)** $OA=|a|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1+i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc $A\in\mathcal{C}$.

$OB=|b|=\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\sqrt{5}+2i\right)\right|.\left|1-i\sqrt{3}\right|=\frac{1}{2}OQ\times\sqrt{4}=3$. Donc $B\in\mathcal{C}$.

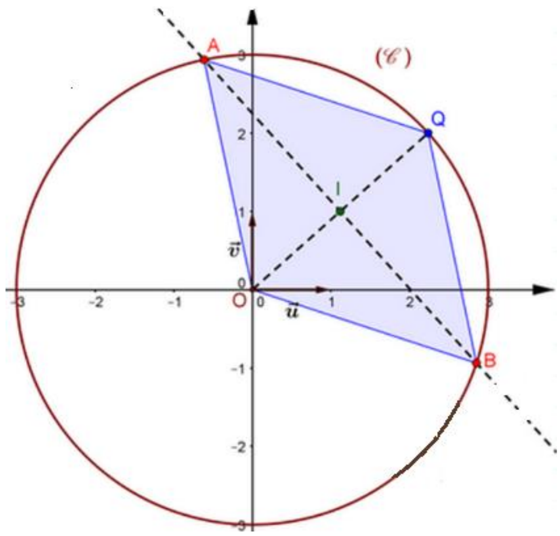
b) $z_{\overrightarrow{OA}}+z_{\overrightarrow{OB}}=a+b=\left(\sqrt{5}+2i\right)\left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2}+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right]=\sqrt{5}+2i=z_Q=z_{\overrightarrow{OQ}}$.

Ainsi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$.

c) On a : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}$ donc le quadrilatère $OAQB$ est un parallélogramme, de plus $OA=OB$ ainsi $OAQB$ est un losange.

d) On construit le point I milieu du segment $[OQ]$

La perpendiculaire à (OQ) passant par I coupe le cercle $\mathcal{C}$ en A et B tel que $\mathrm{Im}(z_A)>0$, car $a=\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{2+\sqrt{15}}{2}$ et $b=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{2}+i\,\frac{2-\sqrt{15}}{2}$.



Exercice n°3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Fonction en exponentielle (limites, variations, points d'inflexions, construction de points sur une représentation graphique donnée)**
- **Calcul d'aires**
- **Fonctions primitives**
- **Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle**

1) **a)** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}=+\infty \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x^2}{x}.e^{-x}=-\infty$.

(C) admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O,\vec{j}\right)$.

c) $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}+x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}}=0+0=0$.

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

2) **a)** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2xe^{-x}-e^{-x}\times\left(1+x^2\right)=\left(2x-\left(1+x^2\right)\right)e^{-x}$

$$=\left(-x^2+2x-1\right)e^{-x}=-\left(x^2-2x+1\right)e^{-x}=-\left(x-1\right)^2e^{-x}.$$

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\leq 0$ et $f'(1)=0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘			0

3) **a)** $T_0 : y = f'(0)\,x + f(0)$ avec $f'(0) = -e^0 = -1$ et $f(0) = e^0 = 1$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -\left[2\times 1\times(x-1)e^{-x} - e^{-x}(x-1)^2\right]$.

$$= -e^{-x}\left(2x - 2 - x^2 + 2x - 1\right) = \left(x^2 - 4x + 3\right)e^{-x}$$

$$= (x-1)(x-3)e^{-x}.$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi A et B sont deux points d'inflexions de (C).

4) **a)** On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + x^2\right)e^{-x} = \left(1 + x^2\right)g(-x)$.

Donc : $f(1) = 2g(-1)$ et $f(3) = 10\,g(-3)$.

b) $A(1; f(1))$ et $f(1) = 2g(-1) = 2y_E$, donc $A(1; 2y_E)$.

$B(3; f(3))$ et $f(3) = 10\,g(-3) = g(\ln(10) - 3) = y_F$, donc $B(3; y_F)$.

T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

5) **a)** T_3 est la tangente à (C) en B.

$$T_3 : y = f'(3)(x-3) + f(3) = -4e^{-3}(x-3) + 10e^{-3}$$

Ainsi $T_3 : y = -4e^{-3}x + 22e^{-3}$.

et comme $-4e^{-3} \times \dfrac{11}{2} + 22e^{-3} = -22e^{-3} + 22e^{-3} = 0$, donc $K \in T_3$. Ainsi $T_3 = (BK)$.

b) Voir figure.

6) **a)** Voir figure.

b) $x \mapsto -\left(x^2+2x+3\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $F'(x) = -\left[(2x+2)e^{-x} - e^{-x}\left(x^2+2x+3\right)\right]$

$$= -e^{-x}\left(2x+2-x^2-2x-3\right) = -e^{-x}\left(-x^2-1\right)$$

$$= \left(1+x^2\right)e^{-x} = f(x).$$

Ainsi F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

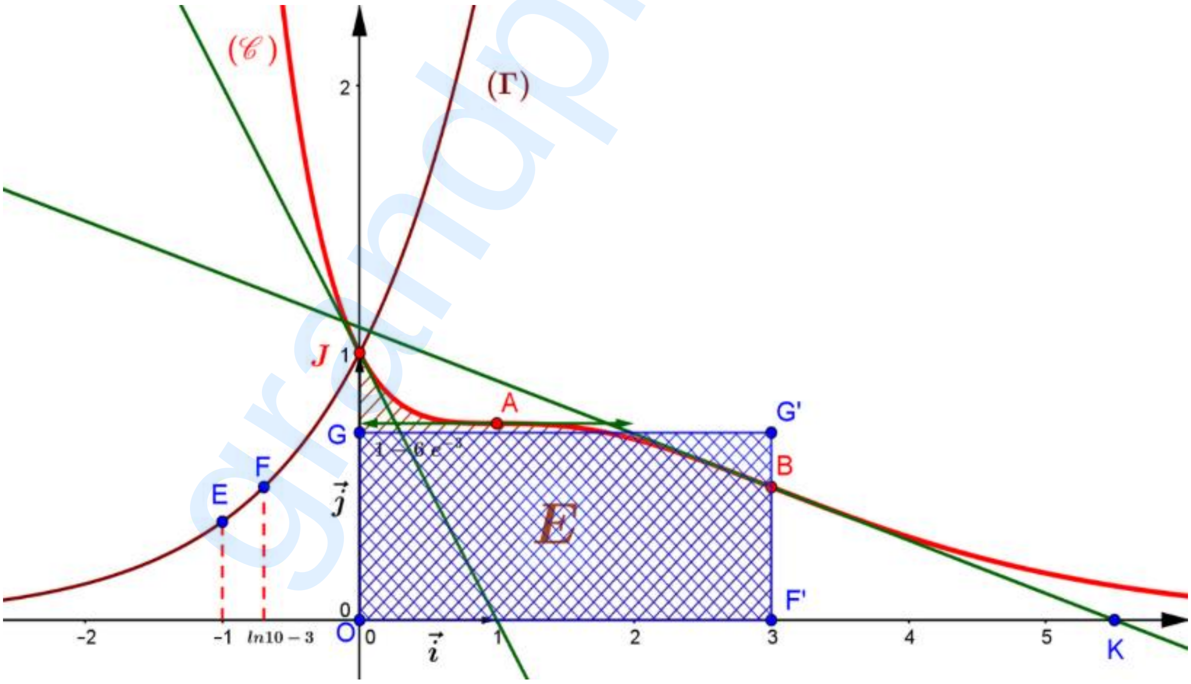
c) $S = \int_0^3 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^3 = F(3) - F(0) = -18e^{-3} + 3 = 3 - 18e^{-3}$.

d) $\overline{f} = \dfrac{1}{3-0}\int_0^3 f(x)dx = \dfrac{1}{3}S = \dfrac{1}{3}\left(3-18e^{-3}\right) = 1-6e^{-3}$.

e) $S = 3 \times \overline{f} = 3 \times \left(1-6e^{-3}\right)$.

Soient $G'(3\ ;\ 1-6e^{-3})$; $F'(3\ ;0)$ et **A** l'aire du rectangle $OF'G'G$,

Donc $S = OF' \times OG =$ **A**.



Exercice n°4 :

De quoi s'agit -il ?

- **Calcul de probabilité d'évènements**
- **Probabilité conditionnelle, probabilité totale**
- **Loi binomiale**

1) **a)** $p(U)=1-p(\overline{U})=1-\frac{5}{100}=0,95$.

b) $p(D/U)=\frac{92}{100}=0,92$ et $p(D/\overline{U})=\frac{55}{100}=0,55$.

2) **a)** $p(D)=p(D\cap U)+p(D\cap\overline{U})=p(D/U)\times p(U)+p(D/\overline{U})\times p(\overline{U})$

$=0,92\times 0,95+0,55\times 0,05=0,9015$.

b) $p(U/D)=\frac{p(U\cap D)}{p(D)}=\frac{0,92\times 0,95}{0,9015}=\frac{1748}{1803}\simeq 0,9694$.

3) **a)** $p_n=1-\overline{p_n}$ avec $\overline{p_n}$ est la probabilité qu'aucune de ces femmes ait une grossesse multiple.

C'est à dire que n femmes ait une grossesse unique.

Ainsi : $p_n=1-(p(U/D))^n=1-(0,9694)^n$.

Autrement : X suit une loi binomiale de paramètres n (n$\geq$2) et $p=p(\overline{U}/D)$

$$p_n=p(X\geq 1)=1-p(X<1)=1-p(X=0)=1-(0,9694)^n.$$

b) $p_n>0,9$ signifie $1-(0,9694)^n>0,9$

signifie $(0,9694)^n<0,1$

signifie $\ln\left((0,9694)^n\right)<\ln(0,1)$

signifie $n\ln(0,9694)<\ln(0,1)$

signifie $n>\frac{\ln(0,1)}{\ln(0,9694)}\simeq 74,09$ car $\ln(0,9694)<0$.

Ainsi le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 est n = 75.