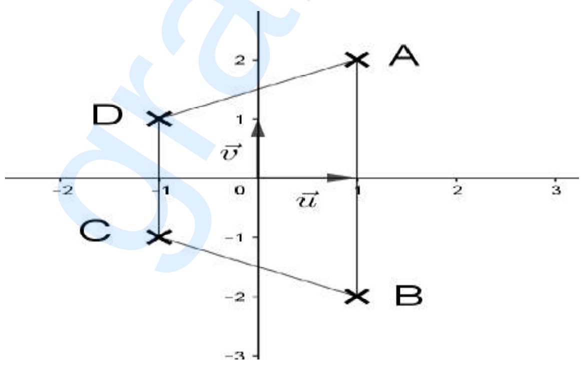
Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

Session contrôle

Exercice 1 ;(4 points)

Questions	solutions
1)	b/
2)	b/
3)	c/
4) i/	a/
ii/	c/

Exercice 2 (4 points)

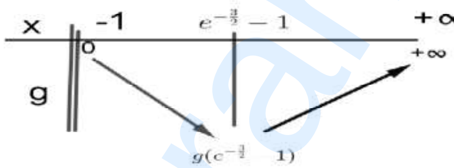
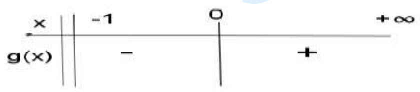
Questions	Solutions
1) a/	$(3+2i)^2=9+12i+(2i)^2=5+12i$
b/	$(E_1): z^2+iz+1+3i=0$ $\Delta=b^2-4ac=i^2-4(1+3i)$ $=-1-4-3i=-(5+12i)=[i(3+2i)]^2$ $z'=\dfrac{-i-i(3+2i)}{2}=-2i+1$ $z''=\dfrac{-i+i(3+2i)}{2}=i-1$
c/	$(E_2): z^2-iz+1-3i=0$ $z^2-iz+1-3i=0 \Leftrightarrow \overline{z^2-iz+1-3i}=0 \Leftrightarrow \overline{z}^2+i\overline{z}+1+3i=0$ Alors si z est solution de (E_2) alors $\overline{z}$ est solution de (E_1) Donc les solutions de (E_2) sont $1+2i$ *et* -1-i
2)	On a $(z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i)=z^4+3z^2+6z+10$ d'où $z^4+3z^2+6z+10=0 \Leftrightarrow (z^2-iz+1-3i)(z^2+iz+1+3i)=0$ $\Leftrightarrow z^2-iz+1-3i=0$ ou $z^2+iz+1+3i=0$ $\Leftrightarrow z=1+2i$ ou z = -1-i ou $z=1-2i$ ou $z=-1+i$
3) a/	
b/	$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=1-2i-1-2i=-4i$ $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=-1-i+1-i=-2i$ Alors $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{DC}}}=2\in IR$ alors $(AB)\parallel(DC)$ ainsi ABCD est un trapèze
c/	$A=\dfrac{(AB+DC)\times h}{2}=6$ u a

Exercice 3 (5 points)

Questions	Solution
1) a/	$M(x,y,z)\in S \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z+5=0$ $\Leftrightarrow (x^2-2x)+(y^2+4y)+(z^2+4z)+5=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+2)^2-4+5=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=2^2$ Donc S est une sphère de centre $\Omega(1,-2,-2)$ et de rayon $R=2$
b/	$d(\Omega,P)=\dfrac{\lvert 1+2-2+1\rvert}{\sqrt{1+4+4}}=\dfrac{2}{3}\prec R=2$ Donc $S\cap P$ est un cercle de centre $K(a,b,c)$ et de rayon $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ $on\ a \begin{cases}\overrightarrow{\Omega K}=\alpha\overrightarrow{n_P}\\ K\in p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=\alpha\\ b+2=-2\alpha\\ c+2=2\alpha\\ a-2b+2c+1=0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a=\alpha+1\\ b=-2\alpha-2\\ c=2\alpha-2\\ \alpha+1-2(-2\alpha-2)+2(2\alpha-2)+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{9}\\ b=-\dfrac{14}{9}\\ c=-\dfrac{22}{9}\\ \alpha=-\dfrac{2}{9}\end{cases}$ Alors $K(\dfrac{7}{9},-\dfrac{14}{9},-\dfrac{22}{9})$
2)	$(K\Omega)$ est une droite qui passe par $\Omega(1,-2,-2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ ($\overrightarrow{n_P}$ est un vecteur normal à P) $M(x,y,z)\in(K\Omega)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega M}=t\,\overrightarrow{n_p}$, $t\in IR$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=t\\ y+2=-2t\\ z+2=t\end{cases}$ Donc $(K\Omega):\begin{cases}x=1+t\\ y=-2-2t\ ,\ t\in IR\\ z=-2+2t\end{cases}$
3) a/	Q est le plan tangent à S au point $I(\alpha,\beta,\gamma)$ donc $\overrightarrow{\Omega I}\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+2\\ \gamma+2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal àQ donc $Q:(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z+d=0$ or $I(\alpha,\beta,\gamma)\in Q$ donc $(\alpha-1)\alpha+(\beta+2)\beta+(\gamma+2)\gamma+d=0$ $\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$ Et le faite que le point $I\in S$ alors

	$\alpha^2-2\alpha+\beta^2+4\beta+\gamma^2+4\gamma+5=0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2\alpha-4\beta-4\gamma-5$ donc on aura : $\alpha^2-\alpha+\beta^2+2\beta+\gamma^2+2\gamma+d=0$ $\Leftrightarrow d=-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$ $\Leftrightarrow d=-\left(2\alpha-4\beta-4\gamma-5\right)+\alpha-2\beta-2\gamma$ $\Leftrightarrow d=-\alpha+2\beta+2\gamma+5$ Ainsi $Q:(\alpha-1)x+(\beta+2)y+(\gamma+2)z-\alpha+2\beta+2\gamma+5=0$
b/	$N(-1,2,-6)$ On a $\begin{cases}-1=1+t\\ 2=-2-2t\\ -6=-2+2t\end{cases} \Rightarrow t=-2$ ainsi $N(-1,2,-6)\in(K\Omega)$
c/	I est un point du cercle (C) donc KI=2. $\overrightarrow{I\Omega}\,.\,\overrightarrow{IN}=KI^2-KN.K\Omega=0$ d'où N est point de Q.

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$g(x)=(x+1)\ln(x+1)+\dfrac{x}{2}$ et $x\in\left]-1,+\infty\right[$ On a $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ donc $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)\ln(x+1)=0$
b/	Pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ on a $g'(x)=\ln(x+1)+1+\dfrac{1}{2}=\ln(x+1)+\dfrac{3}{2}$
c/	$g'(x)=0\Leftrightarrow\ln(x+1)=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}-1$  $g(e^{-\frac{3}{2}}-1)=-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{3}{2}}\right)\prec 0$
d/	$g(0)=0$ 
2) a/	Soit $f(x)=x^2\ln(x+1)$ pour tout $x\in\left]-1,+\infty\right[$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(x+1)=+\infty$ La représentation graphique de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.
b/	$\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}x^2\ln(x+1)=-\infty$ En effet ;

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} (x+1) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} x^2 = 1$

La droite d'équation x = -1 est une asymptote verticale de la représentation graphique de f

c/

pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on a

$$f'(x) = 2x\ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{2x}{x+1} g(x)$$

d/

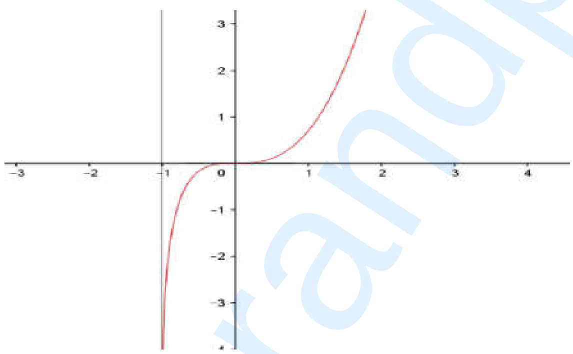
Déterminons le signe de $f'(x)$

x	-1		0		+∞
g(x)		-	0	+	
$\frac{2x}{x+1}$		-	0	+	
$f'(x) = \frac{2x}{x+1} g(x)$		+	0	+	

Soit alors le tableau de variation de f

x	-1		+∞
f'(x)		+	
f	-∞	↗	+∞

e/



3)

a/

Pour tout $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$

Pour tout $x \neq -1$ on a $x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$

b/

$I_1 = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$ On intègre par partie

$u(x) = \ln(x+1)$ $\quad$ $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

$v'(x) = x$ $\quad$ $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

	$I_1 = \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$ Donc $= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$ $= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)\right]_0^1$ $= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) = \frac{1}{4}$
4) a/	On pose $h(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ h est une fonction dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $h'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{(x+1)} - 1 = \ln(x+1)$ ainsi h est une primitive de la fonction $x \to \ln(x+1)$ sur $]-1,+\infty[$
b/	On va utiliser une intégration par partie $\mathrm{I}_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx$ on pose $u(x) = x^{n+1}$ $\mathrm{u'(x)} = (n+1)x^n$ $v'(x) = \ln(x+1)$ $\mathrm{v(x)} = h(x)$ $I_{n+1} = \left[x^{n+1}h(x)\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n h(x)dx = 2\ln 2 - 1 - (n+1)\int_0^1 x^n\left[(x+1)\ln(x+1) - x\right]dx$ Donc $= 2\ln 2 - 1 - (n+1)\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx - (n+1)\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx + (n+1)\int_0^1 x^{n+1}dx$ $= 2\ln 2 - 1 - (n+1)I_{n+1} - (n+1)I_n + \frac{n+1}{n+2}$ Ainsi on déduit que $(n+2)I_{n+1} = -1 + 2\ln 2 + \frac{n+1}{n+2} - (n+1)I_n$
c/	Pour $n = 1$ on trouve $3I_2 = -1 + 2\ln 2 + \frac{2}{3} - 2I_1$ alors on déduit que $I_2 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{6} = -\frac{5}{18} + \frac{2}{3}\ln 2$ I_2 est l'aire de la partie du plan illimité par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation respectuves x = 0 et x = 1