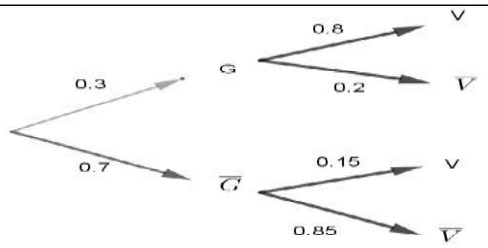
Correction du sujet de baccalauréat 2019 section science expérimentale

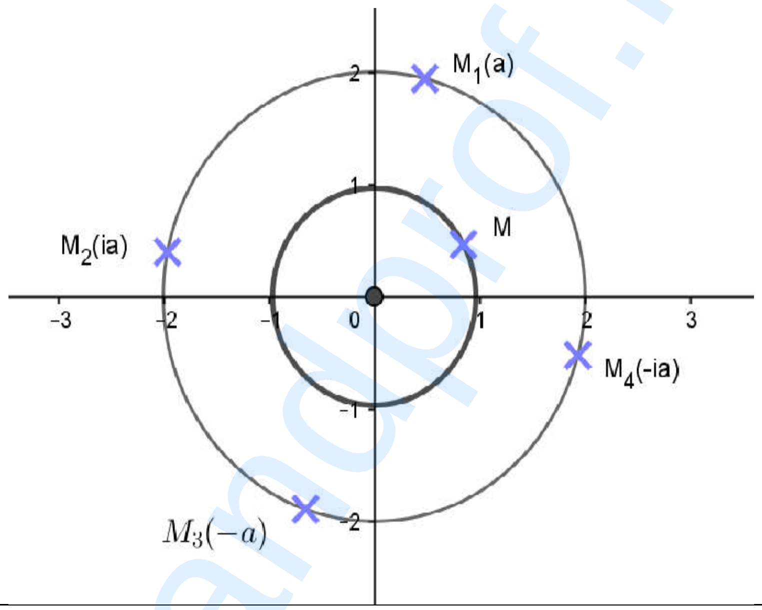
Session principale

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Questions	Solution
1)	
2)	$p(V)=p(V/G)p(G)+p(V/\overline{G})p(\overline{G})$ $=0.3\times 0.8+0.7\times 0.15=0.345$
3)	$p(\overline{G}/V)=\dfrac{p(\overline{G}\cap V)}{p(V)}=\dfrac{0.15\times 0.7}{0.345}=0.304$
4)	$p=C_{10}^{2}\times(0.8)^{2}\times(0.2)^{8}=0.0000737$
5) a/	La probabilité demandée est $(0.2)^{n}$
b/	$p_n=1-(0.2)^{n}$
c/	$p_n\geq 0.9\Leftrightarrow 1-(0.2)^{n}\geq 0.9\Leftrightarrow(0.2)^{n}\leq 0.1$ $\Leftrightarrow n\ln(0.2)\leq\ln(0.1)$ $\Leftrightarrow n\geq\dfrac{\ln(0.1)}{\ln(0.2)}\Leftrightarrow n\geq 1.43$ alors le plus petit valeur est $n=2$

<u>Exercice 2</u>(4 points)

Questions	solutions
1) a/	$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)$ on a $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{12}}$
b/	on a : $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(\sqrt{3}+i)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1)$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ et d'autre part on a $a=2e^{i\frac{5\pi}{12}}=2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)+2i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et par conséquent

	on aura $\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$ Or on sait que $\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ donc $\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right) \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$
2) a/	on a $a = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ donc $a^4 = \left(2e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^4 = 16e^{i\frac{5\pi}{3}} = 16\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.
b/	b/ $z^4 = 8\left(1-i\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow z^4 = a^4 \Leftrightarrow z^4 - a^4 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 - a^2\right)\left(z^2 + a^2\right) = 0 \Leftrightarrow$ $(z-a)(z+a)(z+ia)(z-ia) = 0 \Leftrightarrow z = a$, $z = -a$, $z = ia$ et $z = -ia$
c/	

Exercice 3 (5 points)

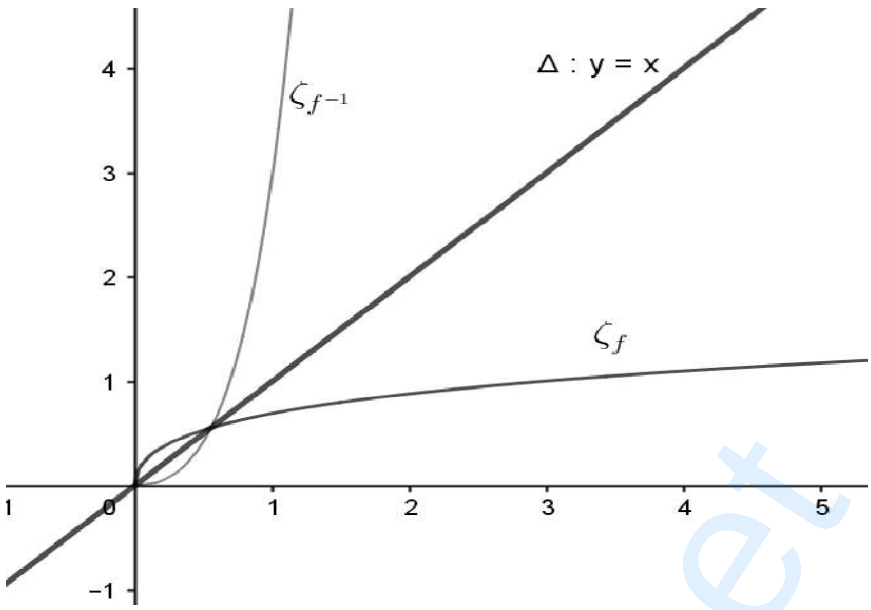
Questions	Solution
1) a/	on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et alors les points A , B et C définissent un plan P.
b/	$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P donc P a pour équation : $-6x - 6y + 6z + d = 0$ et comme $A(-2,1,1) \in P$ donc $12 - 6 + 6 + d = 0$ donc $d = -12$ et alors $P: -6x - 6y + 6z - 12 = 0$ alors P: $x + y - z + 2=0$

2) a/	on a $2+2-0+2=6\neq 0$ donc $E\notin P$
b/	$V_{EABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AE}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\right\|=6$
3)	$\overrightarrow{u_\Delta}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ qui est un vecteur normal de P donc $\Delta\perp P$ $M\left(x\quad y\quad z\right)\in P\cap\Delta\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\alpha+\alpha-\left(-\alpha+2\right)+2=0\\x=\alpha\\y=\alpha\\z=-\alpha+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\x=0\\y=0\\z=2\end{cases}$ Donc $P\cap\Delta=\left\{H\left(0,0,2\right)\right\}$
4) a/	$\alpha\neq 0$ et $M\left(\alpha,\alpha,-\alpha+2\right)\in\Delta$ $V_{MABC}=\frac{1}{6}\left\|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{pmatrix}-6\\-6\\6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\alpha+2\\\alpha-1\\-\alpha+1\end{pmatrix}\right\|=\left\|3\alpha\right\|$
b/	$V_{MABC}=2\,V_{EABC}\Leftrightarrow\left\|3\alpha\right\|=12\Leftrightarrow\alpha=4$ ou $\alpha=-4$ donc $M\left(4,4,-2\right)$ ou $M\left(-4,-4,6\right)$

Exercice 4 (7 points)

Questions	Solution
1) a/	$f(x)=\ln(1+\sqrt{x})$ On a la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{x}$ est dérivable et strictement positif sur $\left[0,+\infty\right[$ alors la fonction f est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et on a pour tout $x\in\left[0,+\infty\right[$, $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$
b/	$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}=\left(+\infty\right)\times 1=+\infty$ En effet $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$

	$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=1$ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ donc la courbe représentative de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0 dirigé vers les ordonnées positif
c/	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\sqrt{x})$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sqrt{x})=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}\cdot\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}=0\times 0=0$ En effet : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1\right)}{\sqrt{x}.\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sqrt{x})=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})}=0$ Donc la courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.
d/	x | 0 … $+\infty$ f | 0 ↗ $+\infty$
e/	f est continu et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)=[0,+\infty[$.
f/	soit $x\in[0,+\infty[$ et $y\in[0,+\infty[$ tel que $f^{-1}(x)=y$ $f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \Leftrightarrow \ln(1+\sqrt{y})=x \Leftrightarrow 1+\sqrt{y}=e^x$ $\Leftrightarrow \sqrt{y}=e^x-1 \Leftrightarrow y=(e^x-1)^2$ donc pour tout $x\in[0,+\infty[$ on a $f^{-1}(x)=(e^x-1)^2$
2) a/	$I=\left[\dfrac{1}{4},1\right]$ On a $\dfrac{1}{4}\le x\le 1$ donc $\dfrac{1}{2}\le\sqrt{x}\le 1$ donc $\dfrac{3}{4}\le x+\sqrt{x}\le 2$ donc $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}\le\dfrac{4}{3}$ d'ou $\dfrac{1}{4}\le f'(x)\le\dfrac{2}{3}$ soit donc pour tout $x\in I$, $f'(x)\le\dfrac{2}{3}$
b/	On pose $u(x)=f(x)-x$ u est dérivable sur I et on a pour tout $x\in I$ $u'(x)=f'(x)-1\prec 0$ alors la fonction u est strictement décroissante sur I. u est continu et strictement décroissante sur I alors elle réalise une bijection de I sur $u(I)=\left[\ln 2-1,\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{4}\right]=J$ et comme $0\in J$ alors l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α dans I. De plus $u(0.5)\times u(0.6)\prec 0$ donc $0.5\prec\alpha\prec 0.6$

3) a/	
b/	$A = 2\int_0^\alpha \left(x - f^{-1}(x)\right)dx = 2\int_0^x x - \left(e^x - 1\right)^2 dx = 2\int_0^\alpha (x - e^{2x} + 2e^x - 1)dx$ $= 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - x\right]_0^\alpha$ $= \alpha^2 - e^{2\alpha} + 4e^\alpha - 2\alpha - 3$
4) a/	on a $u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ donc vrais pour n= 0 Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ et montrons que $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ On a $\frac{1}{4} \le u_n \le 1$ et f est une fonction strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ alors $f(\frac{1}{4}) \le f(u_n) \le f(1)$ donc $\frac{1}{4} \le \ln(\frac{3}{2}) \le u_{n+1} \le \ln 2 \le 1$ alors $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$ par suite pour tout $n \in IN$ $u_n \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$.
b/	f est dérivable sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ et pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $f'(x) \le \frac{2}{3}$ donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a et le faite que $u_n, \alpha \in I$ donc $\left\|f(u_n) - f(\alpha)\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n - \alpha\right\| \Leftrightarrow \left\|u_{n+1} - \alpha\right\| \le \frac{2}{3}\left\|u_n - \alpha\right\|$ et on montre par récurrence sur n que pour tout $n \in IN$ $\left\|u_n - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ On a $\left\|u_0 - \alpha\right\| = \left\|1 - \alpha\right\| \le \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ donc la propriété est vraie pour n=0

	Soit $n \in IN$ supposons que $\lvert u_n - \alpha \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et montrons que $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ On sait que $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \le \frac{2}{3}\lvert u_n - \alpha \rvert$ donc $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \le \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ et par suite pour tout $n \in IN$ on a $\lvert u_n - \alpha \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$
c/	c/ on a $\lvert u_n - \alpha \rvert \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ donc la suite est convergente et converge vers α
d/	on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$ et f^{-1} est continu en α donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = f^{-1}(\alpha) = \alpha$