Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2014

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

A)				B)	
1)	2)	3)	4)	1)	2)
b	c	b	c	a	c

Exercice 2

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.

1)a) Montrons par récurrence que $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 0 > -1$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $u_n > -1$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$$u_{n+1} - (-1) = u_{n+1} + 1 = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1 = \frac{u_n - 1 + u_n + 3}{u_n + 3} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} = \frac{2(u_n + 1)}{u_n + 3}.$$

On a $u_n > -1 \Rightarrow u_n + 1 > 0$ et $u_n + 3 > 0$

$$\Rightarrow \frac{2(u_n + 1)}{u_n + 3} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > -1$$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{u_n - 1 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 - 2u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{-(u_n + 1)^2}{u_n + 3} < 0.$$

$u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.

$u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite est minorée puisque $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

2) (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n+1}$.

a) Montrons que (v_n) est une suite arithmétique.

On a: $$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{u_{n+1}+1}-\frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{\frac{u_n-1}{u_n+3}+1}-\frac{1}{u_n+1}$$
$$= \frac{1}{\frac{2(u_n+1)}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+3}{2(u_n+1)}-\frac{1}{u_n+1} = \frac{u_n+1}{2(u_n+1)} = \frac{1}{2}.$$

$v_{n+1}-v_n = \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$.

$v_0 = \dfrac{1}{u_0+1} = 1$.

b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

D'où $v_n = \dfrac{1}{2}n + v_0 = \dfrac{1}{2}n+1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_n = \frac{1}{u_n+1} \Rightarrow u_n+1 = \frac{1}{v_n}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n}-1 = \frac{1}{\frac{1}{2}n+1}-1 = \frac{2}{n+2}-1 = \frac{2-(n+2)}{n+2} = \frac{-n}{n+2}.$$

Ainsi $u_n = \dfrac{-n}{n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{1+\frac{2}{n}} = -1.$$

Exercice 3

f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 7\ln(\dfrac{x+1}{2})+4-2x$.

1) Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=2$ est le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y=2$ et la courbe de f. On peut remarquer que cette droite coupe la courbe en deux points. Ainsi l'équation $f(x)=2$ admet deux solutions dans $]-1;+\infty[$.

2) On a $f(1)=2$; $f(4,6) \simeq 2,007$ et $f(4,7) \simeq 1,931$.

3)a) $$f'(x) = 7\frac{(\frac{x+1}{2})'}{(\frac{x+1}{2})}-2 = 7\frac{\frac{1}{2}}{\frac{x+1}{2}}-2 = \frac{7}{x+1}-2 = \frac{7-2(x+1)}{x+1} = \frac{5-2x}{x+1}.$$

$f'(x) = \dfrac{5-2x}{x+1}$, pour tout $x \in]-1;+\infty[$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$.

En exploitant le graphique on obtient le tableau de variation de f :

x	1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	$-\infty$

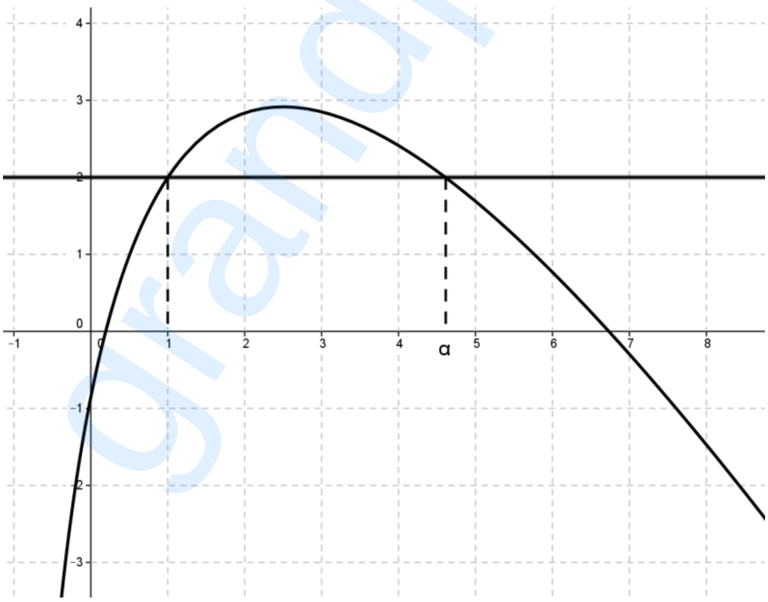
c) Le maximum de f est $f(\frac{5}{2}) = 7\ln(1{,}75) - 1$.

4)a) Le bénéfice réalisé par la vente de 10 objets est $f(1) = 2$ mille dinars.

b) <u>En exploitant la courbe</u>, on peut remarquer que le bénéfice est supérieur ou égal à 2 pour les valeurs de x comprises entre 1 et α, où α est l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = 2$ et la courbe de f.

$f(\alpha) = 2$; $f(4{,}6) \simeq 2{,}007$ et $f(4{,}7) \simeq 1{,}931$. On a $4{,}6 < \alpha < 4{,}7$.

Ainsi le nombre d'objets à fabriquer et à vendre pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à deux mille dinars, vari dans l'intervalle $[10; 46]$.



c) La valeur maximale de f est atteinte pour $x = 2{,}5$. Cela correspond à la fabrication et vente de 25 objets.

$f(2{,}5) = 7\ln(1{,}75) - 1 \simeq 2{,}9173$. Cela correspond à un bénéfice de 2917 dinars (arrondi en dinars).

Exercice 4

1)a) Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
Ainsi on a :

Sommet	B	K	N	S	T
Degré	1	2	2	3	4

b) On peut remarquer que le graphe donné est connexe, puisqu'on peut relier deux quelconques de ces sommets par une chaîne. En plus deux seulement de ces sommets sont de degré impair. D'où le graphe donné admet au moins une chaîne eulérienne.

Exemples de chaînes eulériennes : B-T-K-S-N ; K-S-N-T-B ; N-S-K-T-B.

2) En respectant l'ordre B-K-N-S-T, la matrice A de ce graphe est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) On admet que $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

a) Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant S à B, on lit dans la matrice A^3 , $N = 2$.

b) Pour déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant S à T, on lit dans la matrice A^3, $N = 6$.

4) On peut présenter la situation par le graphe donné.

Il est clair que les chemins reliant Sfax à Béja passant exactement par deux autres villes sont :

Sfax-Nabeul-Tunis-Béja ; Sfax-Kairouan-Tunis-Béja.