Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I)		II)	
1)	2)	1)	2)
a	b	b	a

Exercice 2

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) $\text{dét}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7-2\times6+3\times1 = -2.$

$\text{dét}(A) \neq 0$, d'où la matrice A est inversible.

2)a) $A\times B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $A\times B + 2I = 0$, où 0 est la matrice nulle d'ordre 3.

$A\times B + 2I = 0 \iff A\times B = -2I$

$\iff A\times\left(-\frac{1}{2}B\right) = I$

D'où l'inverse de A est $A^{-1} = -\frac{1}{2}B.$

3)a) $(S): \begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y+2z=4 \\ 3x+4y+5z=8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

b) $(S):\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y+2z=4 \\ 3x+4y+5z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}B \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(15, -8, -1)\}$.

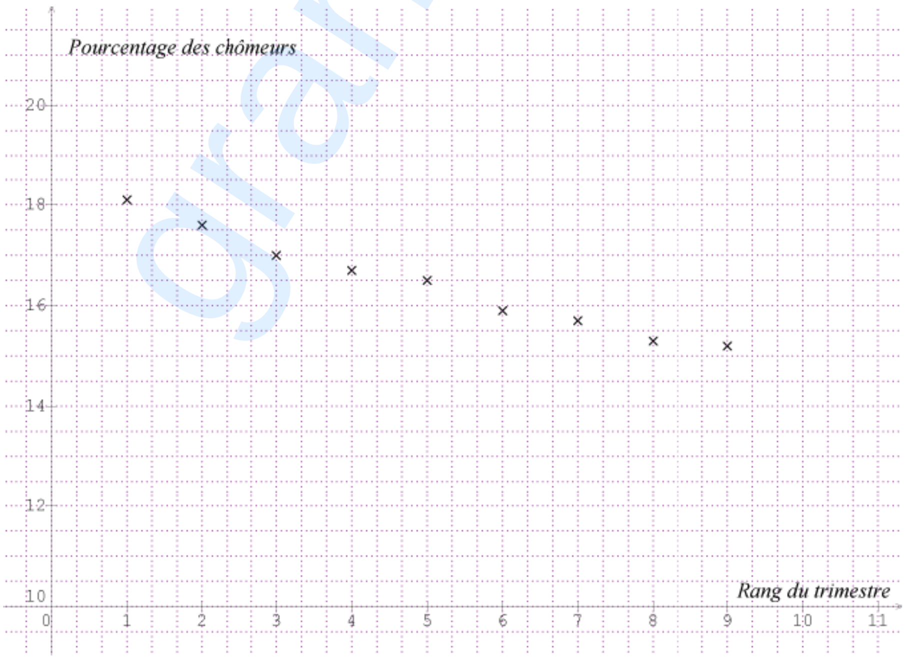
Exercice 3

Le tableau donne les pourcentages des chômeurs en Tunisie pendant neuf trimestres successifs à compter du premier trimestre de l'année 2012.

Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pourcentage des chômeurs y_i	18,1	17,6	17	16,7	16,5	15,9	15,7	15,3	15,2

Source : I.N.S

1) Le nuage des points de la série statistique (x_i, y_i).



2)a) $r(x, y) = -0,99$.

b) On peut remarquer que le nuage des points (x_i, y_i) est allongé suivant une droite.
Donc un ajustement affine entre x et y est justifié.

3)a) Une équation de la droite de régression de y en x est $y = -0{,}38x + 18{,}31$.

b) Le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015.
Le deuxième trimestre de l'année 2015 correspond à $x = 14$.
D'où $y = -0{,}38 \times 14 + 18{,}31 = 12{,}99 \simeq 13$.
Ainsi on estime le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015 à 13%.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, d'où l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$, car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, d'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale pour (C).

2)a) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}.x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2},\ x \in]0, +\infty[.$$

$$f'(1) = \frac{-\ln 1}{1^2} = 0.$$

b) Le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

c) On a $f([1, +\infty[) =]0, 1]$, d'où sur l'intervalle $[1, +\infty[$ f ne s'annule pas.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $f(]0, 1]) =]-\infty, 1]$.

$0 \in]-\infty, 1]$, d'où il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Soit $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x} = 0$

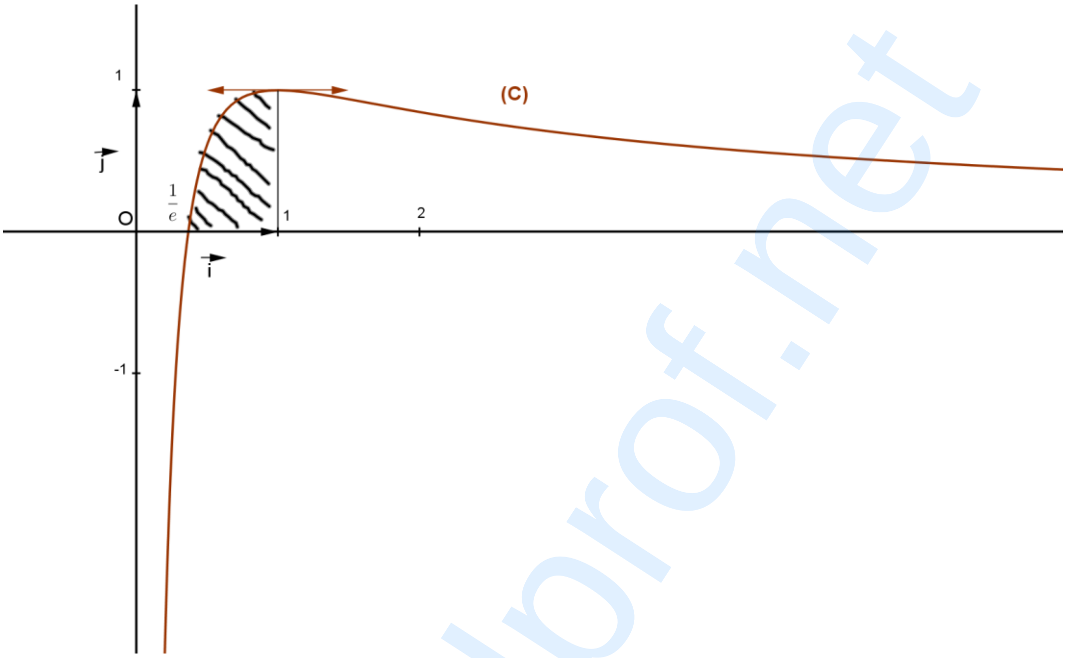
$\Leftrightarrow 1+\ln x = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}.$

Ainsi $\alpha = \dfrac{1}{e}.$

d) La courbe (C) de la fonction f :



3)a) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{1}{2}(2+\ln x)\ln x.$

La fonction $x \mapsto \ln x$ et la fonction $x \mapsto 2+\ln x$ sont dérivables sur $]0, +\infty[$, d'où F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$F'(x) = \frac{1}{2}(2+\ln x)'\ln x + \frac{1}{2}(2+\ln x)(\ln x)' = \frac{1}{2}\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{2}(2+\ln x)\frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x}(2+2\ln x) = \frac{1+\ln x}{x} = f(x)$$

D'où F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

b) R la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1.$ Soit A l'aire de cette région R.

$$A = \int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx = [F(x)]_{e^{-1}}^{1} = F(1) - F(e^{-1})$$
$$= 0 - \frac{1}{2}\left(2+\ln e^{-1}\right)\ln e^{-1} = -\frac{1}{2}(2+(-1))\times(-1) = \frac{1}{2}\text{unité d'aire.}$$