Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1)a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+2u_0} = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{u_1}{1+2u_1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{5}$.

b) Montrons par récurrence que $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 1 > 0$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $u_n > 0$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

On a $u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{1+2u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0.$$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \dfrac{-2u_n^2}{1+2u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a $u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$ et $-2u_n^2 < 0$

$$\Rightarrow \frac{-2u_n^2}{1+2u_n} < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

$u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est minorée par (-1) puisque $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3)a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\ell = \frac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell(1+2\ell) = \ell \;;\; \ell \neq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$$

b) On a $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+2x}$.

La suite (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

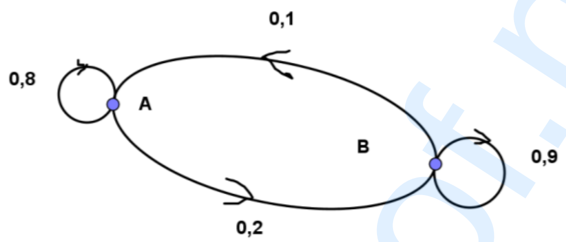
La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, d'où $f(\ell)=\ell$.

$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$. (d'après 3)a)). Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2

La matrice de transition associée au graphe G est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1) Le graphe G.



2)a) La probabilité qu'un affilé à la formule B garde la même formule l'année suivante est 0,9.

b) La probabilité qu'un affilé à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante est 0,1.

3) Soit $P_0 = (0,3 \;\; 0,7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial.

On a $P_1 = P_0 \times M = (0,3 \;\; 0,7)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$= (0,3\times 0,8 + 0,7\times 0,1 \;\;\; 0,3\times 0,2 + 0,7\times 0,9) = (0,31 \;\; 0,69)$.

4) Pour montrer que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice qui traduit l'état stable, il suffit de montrer que $P \times M = P$.

$$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 0,8 + \frac{2}{3}\times 0,1 & \frac{1}{3}\times 0,2 + \frac{2}{3}\times 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = P.$$

D'où la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3

On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}$.

1)a) $\text{dét}(M)=\begin{vmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=1-3\times4+2\times8=5.$

$\text{dét}(M)\neq 0$, d'où la matrice M est inversible.

b) $M\times N=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$M\times N=I_3$, d'où $M^{-1}=N$. L'inverse de M est N.

c) $(S):\begin{cases}x+4y+2z=110\\3x+2y+3z=120\\2x+y+2z=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-110+6\times120-8\times75\\0\times110+2\times120-3\times75\\1\times110-7\times120+10\times75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\\20\end{pmatrix}.$

D'où $S_{\mathbb{R}^3}=\{(10,15,20)\}$.

2)a) a, b et c les nombres (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées par les machines X, Y et Z travaillant en plein temps.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine X est $a+4b+2c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Y est $3a+3b+3c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Z est $2a+b+2c$ heures.

D'autre part on a les capacités hebdomadaires, exprimés en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement 110, 120 et 75.

Ainsi $\begin{cases}a+4b+2c=110\\3a+2b+3c=120\\2a+b+2c=75\end{cases}$. Ce qui prouve que le triplet (a,b,c) vérifie le système (S).

b) Le triplet (a,b,c) vérifie le système (S), d'où $(a,b,c)=(10,15,20)$.

Ainsi $a=10$, $b=15$ et $c=20$.

c) Le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent en plein temps est : $60a+50b+40c=60\times10+50\times15+40\times20=2150$ dinars.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $f(0)=\dfrac{-2}{1+e^0}=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1+e^x}=-2$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{1+e^x}=0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ au voisinage de (-∞).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de (+∞).

2)a) $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{2(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

x	-∞	0	+∞
f'(x)		+	
f	-2	↗	0

c) (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

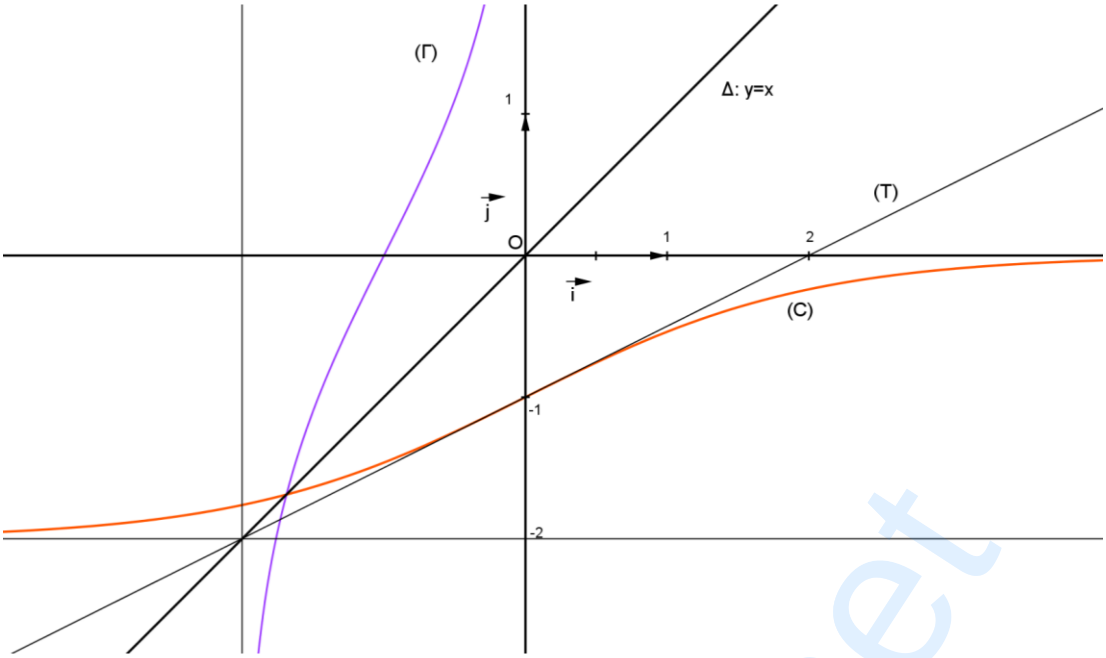
$(T): y=f'(0)(x-0+f(0)$

$(T): y=\dfrac{1}{2}x-1$.

d) Voir figure

3)a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=[-2,+\infty[$.

b) Voir figure.



4)a) $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2}=\ln(1+e^{\ln 2})-\ln(1+e^0)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$.

b) $f(x)=\frac{-2}{1+e^x}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$$\frac{2e^x}{1+e^x}-2=\frac{2e^x-2(1+e^x)}{1+e^x}=\frac{-2}{1+e^x}=f(x).$$

D'où $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}-2$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.

$$A=\int_0^{\ln 2}-f(x)dx=-\int_0^{\ln 2}\left(\frac{2e^x}{1+e^x}-2\right)dx=-2\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx+\int_0^{\ln 2}2dx$$

$$=-2\ln\frac{3}{2}+[2x]_0^{\ln 2}=-2\ln\frac{3}{2}+2\ln 2=2\left(\ln\frac{2}{3}+\ln 2\right)=2\ln\frac{4}{3}\text{ unité d'aire.}$$