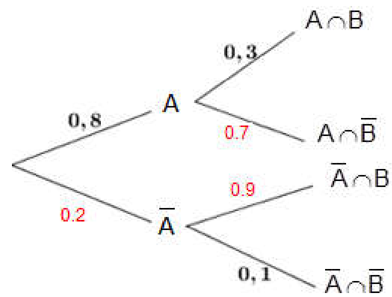
Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session de contrôle 2017 Section : *Mathématiques*

Exercice 1

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :



1) a) 0.7

2) b) 0.18=0.2x0.9

3) c) $\dfrac{p(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{0.8\text{x}0.3}{0.8\text{x}0.3+0.2\text{x}0.9}=\dfrac{24}{42}=\dfrac{4}{7}$.

Exercice 2

Le triangle AIC est rectangle en I et $(\overrightarrow{AI},\widehat{\ \overrightarrow{AC}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ car $(\overrightarrow{CA},\widehat{\ \overrightarrow{CI}})\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$, puisque $I\in[CB)$.

De plus $[IE]$ est une médiane dans ce triangle donc $IE=AE$ donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car $(\overrightarrow{AI},\widehat{\ \overrightarrow{AE}})\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$.

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

AB=$\sqrt{2}$ AI et $(\overrightarrow{AI},\widehat{\ \overrightarrow{AB}})\equiv-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ par la suite $S(I)=B$.

• $S_\Delta(E)=I$ alors $f(E)=S\text{ o }S_\Delta(E)=S\ (I)=B$.

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ et d'une similitude indirecte S_Δ de rapport 1 et comme $A\in\Delta$ alors $f(A)=S\text{ o }S_\Delta(A)=A$ (f(A) = A) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$.

c) f o f est une homothétie de centre A et de rapport : $\sqrt{2}^2=2$.

* $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ donc f o f (E)=C.

* f o f (E)=C d'où f (f(E)) = C or f(E) = B alors f(B) =C.

d) * (BJ) $\perp$ (AE) et f(B)=C donc :

f (BJ) est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite f(AE) = (AB). D'où f(BJ) = (CK).

* $J\in(BJ)\cap(AC)$ donc $f(J)\in f(BJ)\cap f(AC)=(CK)\cap(AB)=\{K\}$. Ainsi $f(J)=K$. (f(AC)=f(AE)).

3) a) On a $g(C)=A$ et $g(K)=I$. On note $B'=g(B)$.

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et <u>direct</u> donc son image IB'A par g est un triangle rectangle en I, isocèle et <u>indirect</u>. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect. D'où B= B' et par la suite B est le centre de g.

b) g(B) = B et g(K)= I et A appartient à la droite (BK) donc D =g(A) est un point de la droite (BI).

c) g(C)=A , g(B)=B et g(A)=D ; g est une similitude indirecte d'où

$$(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \overrightarrow{AD}})\equiv-(\overrightarrow{CB},\widehat{\ \overrightarrow{CA}})[2\pi]\equiv(\overrightarrow{CA},\widehat{\ \overrightarrow{CB}})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que $(\overrightarrow{AB},\widehat{\ \overrightarrow{AT}})\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$.

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite $[AT)$.

4) a) φ est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

• $\varphi(A)=gof(A)=g(A)=D$ et $\varphi(B)=gof(B)=g(C)=A$.

b) $\varphi(A) = D$ et $\varphi(B) = A$. Soit θ une mesure de l'angle de φ.

$$\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}}\right)[2\pi] \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi].$$

5) • $\varphi(E) = gof(E) = g(B) = B$, $\varphi(B) = A$ et $\varphi(A) = D$. Donc $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$.

•$\varphi \circ \varphi \circ \varphi$ est la complosée de 3 similitudes directes de même centre Ω et de même angle $\frac{7\pi}{6}$ donc c'est une similitude directe de centre Ω et d'angle $3x\frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

• $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ donc $(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ et $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = F$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{DF}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$, donc $(EJ) \perp (DF)$.

c) • $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$ et $\varphi(J) = g \circ f(J) = g(K) = I$ d'où $F = \varphi \circ \varphi(I)$

•$\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I) = F \\ \varphi \circ \varphi(E) = A \\ \varphi \circ \varphi(B) = D \end{cases}$ et comme IB = IE alors FD = FA.

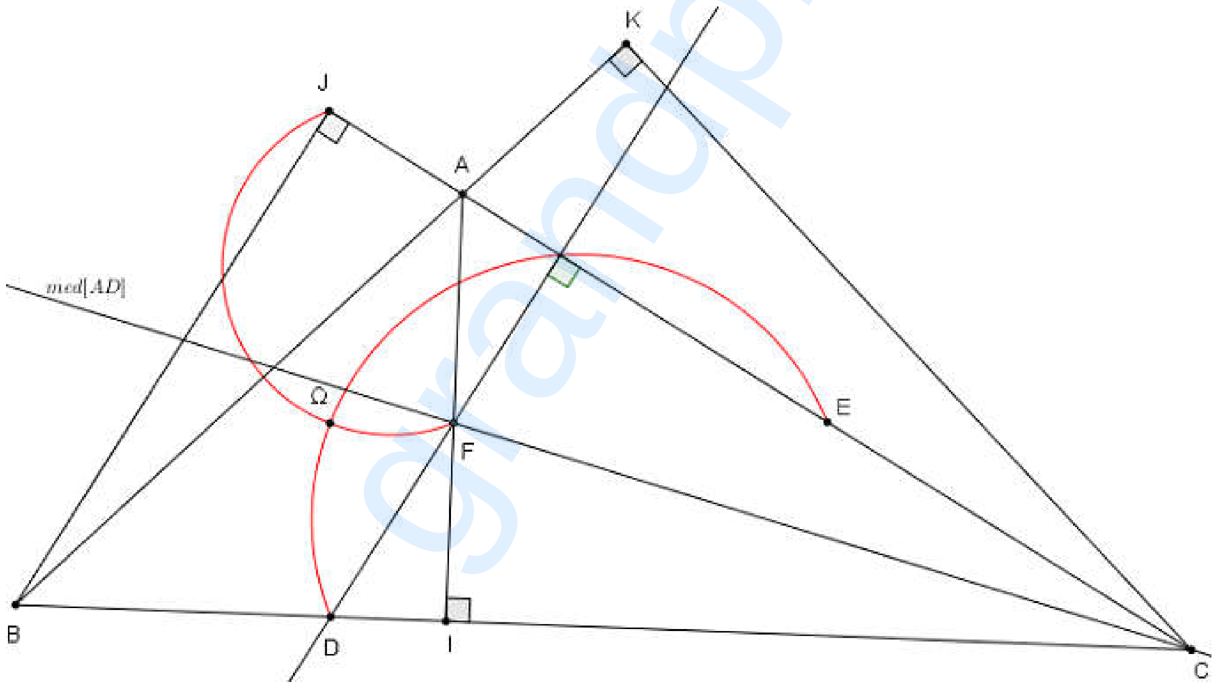
d) •Pour la construction du point D :

On utilise le fait que $FD = FA$ c'est à dire $F \in med[AD]$ et que $(FD) \perp (JE)$.

• $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_1 de diamètre $[ED]$. Voir figure

$\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc Ω est un point du demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JF]$. Voir figure

• $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$.



Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b) $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$ donc z_1 et z_2 ne sont pas conjugués.

2) a) $z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2 = (2z_C)^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1)$. Car $z_2 + z_1 = 2z_C$ et $z_1z_2 = 1$.

c) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}}\right) \equiv \arg\left(\frac{1 - z_C}{z_2 - z_1}\right) + \arg\left(\frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \cdot \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1}\right)[2\pi]$

$\equiv \arg\left(\frac{z^2{}_C - 1}{(z_2 - z_1)^2}\right)[2\pi] \equiv \arg\left(\frac{1}{4}\right)[2\pi] \equiv 0[2\pi]$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].

La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

b) • $(M \in (C)) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow |z - iy| = |1 - iy| \Leftrightarrow \left(|z - iy|^2 = |1 - iy|^2\right)$.

$\Leftrightarrow (z - iy)(\overline{z} + iy) = (1 - iy)(1 + iy)$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + iy(z - \overline{z}) + y^2 = 1 + y^2$

$\Leftrightarrow z\overline{z} + iy(z - \overline{z}) = 1$.

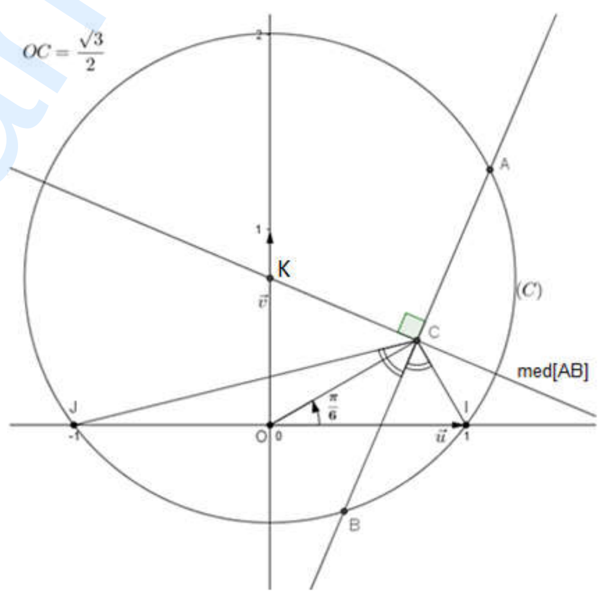
c) $A \in (C) \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} + iy(z_1 - \overline{z_1}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2}\frac{1}{\overline{z_2}} + iy\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{\overline{z_2}}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2 \cdot \overline{z_2}}\left(1 + iy\left(\overline{z_2} - z_2\right)\right) = 1 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2} + iy(z_2 - \overline{z_2}) = 1 \Leftrightarrow B \in (C)$.

4) a) $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$, Voir figure.

b) La droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.
La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ($OA > OB$ car $|z_1| > 1$.)



Exercice 4

A) 1) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à (C_f)

b) • $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln(x+1)}{x}$. (pour x > 0, $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1)$)

∗ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$,

∗ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} . \dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

La courbe (C_f) admet au voisinage de +∞ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$.

2) a) Pour tout $x > 0$,

$f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{x+1}\right) = 2\ln x - \ln(x+1)$.

D'où $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

b) Tableau de variation

x	0	+∞
f'(x)	‖	+
f	‖ −∞	↗ +∞

c) La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ donc f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)$.

De la continuité de f sur $]0,+\infty[$ et des égalités $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ on déduit que $f(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.

3) a) On trouve $x' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

b) $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'où $-\dfrac{1}{\alpha} = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = x''$.

Soit $M(x,y)$ un point du plan.

$$M \in (C_f) \cap (O,\vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = x+1. \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point A d'abscisse $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

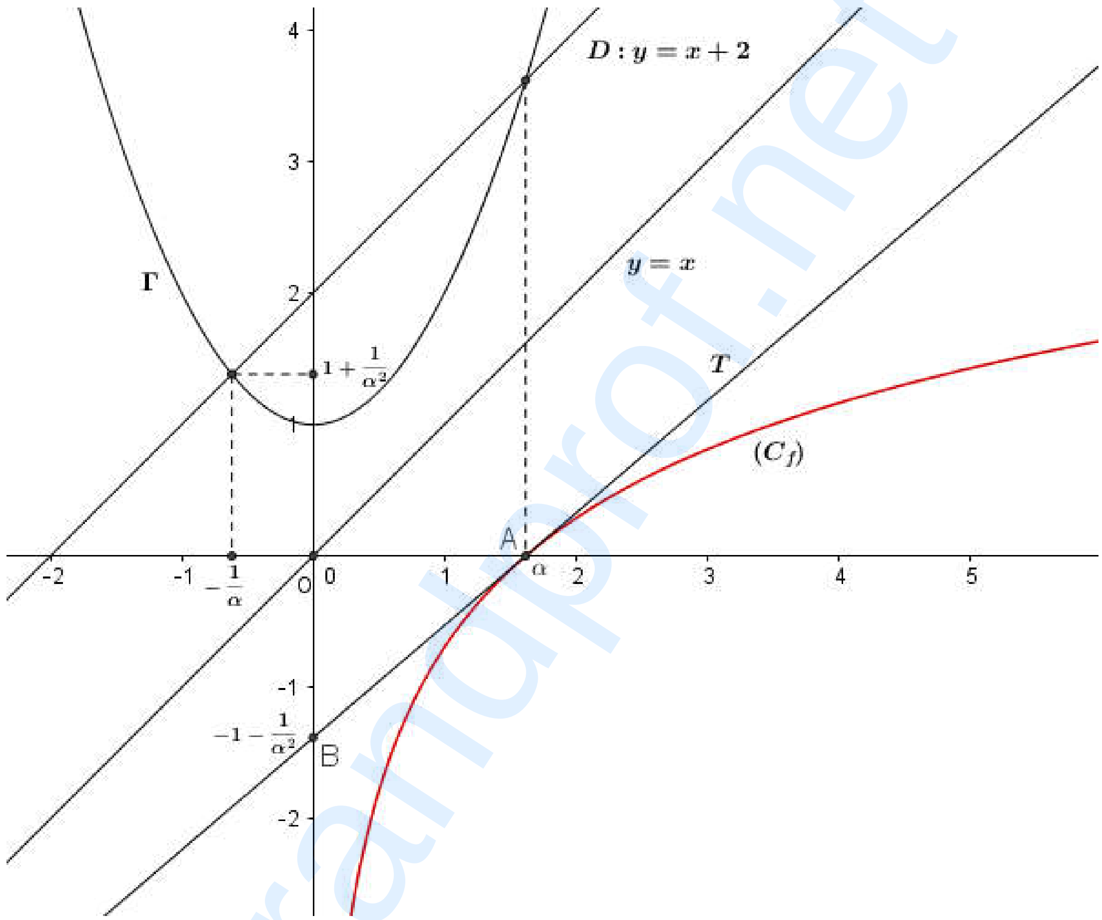
d) $T : y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$.

$f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) = \dfrac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} = \dfrac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$ puisque $\alpha^2 = \alpha + 1$, d'où $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^3}$.

Par la suite $T :\ y = \left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$.

e) $B\left(0\,,-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^3}\right)(0-\alpha) = -1-\dfrac{1}{\alpha^2}$ alors $B \in (T)$.

4) a) et b)



B) 1) a) Soit $x \geq 1$ et $t \in [1, x]$,

$*$ $1 \leq t \leq x$ et $n \geq 1$ alors $1 \leq t^n \leq x^n$ or f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

donc $f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$ d'où $\displaystyle\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_1^x f(t^n)\, dt \leq \int_1^x f(x^n)\, dt$.

Donc pour tout $x \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$.

b) $G_n(x) = \int_1^x f(t^n)\,dt$. On intègre par parties:

Posons $\begin{vmatrix} u(t) = f(t^n) \\ v'(t) = 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} u'(t) = n\,t^{n-1}\dfrac{t^n+2}{t^n\left(t^n+1\right)} = \dfrac{n}{t}\dfrac{t^n+2}{\left(t^n+1\right)} \\ v(t) = t \end{vmatrix}$

Donc $G_n(x) = \left[t f\left(t^n\right)\right]_1^x - n\int_1^x \frac{t^n+2}{t^n+1}dt = x f\left(x^n\right) - f(1) - n\int_1^x\left(1+\frac{1}{t^n+1}\right)dt$

$= x f\left(x^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{t^n+1}dt.$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a) $\alpha > 1$ donc $\sqrt[n]{\alpha} > 1$

D'aprés B)1)a) : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) \leq G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) \leq f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right)\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$; ($\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\alpha}$) et $f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) = f(\alpha) = 0$

D'aprés le théorème de comparaison des limites $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}-1}{\frac{1}{n}\ln(\alpha)}.\ln(\alpha)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln(\alpha) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Par la suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$

d) $J_n = -G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) + \sqrt[n]{\alpha}\, f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right).$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n\left(\sqrt[n]{\alpha}\right) = 0.$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha}\, f\left(\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\alpha}\, f(\alpha) = 1\text{x}0 = 0$

* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{\alpha}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{\alpha}-1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = -\ln(\frac{1}{2}) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right).$