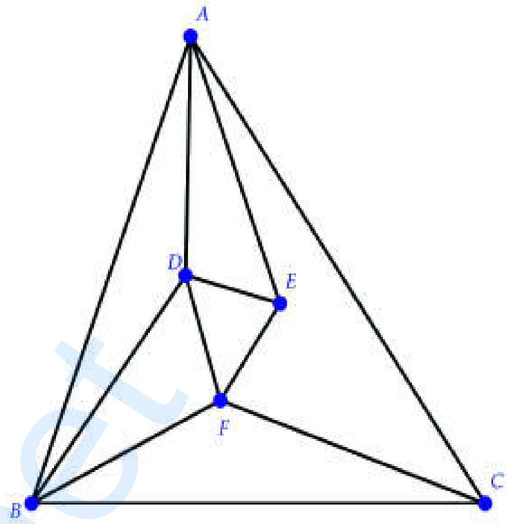
Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session principale 2018 **Section : Economie et gestion**



<u>Exercice 1</u> (5 points)

On considère le graphe G ci -contre

dont les sommets sont A,B,C,D,E et F dans cet **ordre**

1) Le graphe G est connexe car il existe toujours une chaine reliant deux sommets distincts.

La chaine A–B–C–F–E–D contient tous les sommets du graphe

2) Le graphe G est connexe et contient exactement deux sommets de degré impair E et C (d°E = d°C =3)

Donc le graphe G admet au moins une chaine eulérienne d'extrémités E et C

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**

Un exemple de chaine eulérienne C–B–F–D–B–A–C–F–E–D–A– E

3) a) On a d°C =3;impair; donc le graphe G n'admet pas un cycle eulérien.

b) Il suffit d'ajouter une arrête reliant les sommets E et C pour obtenir un graphe connexe contenant un cycle eulérien.

4) On note δ(G) le nombre chromatique du graphe G

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**
couleur	**C1**	**C2**	**C3**	**C1**	**C3**	**C2**

D'ou $\delta(G)=3$

5)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

$$M^3=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Il existe 5 chaines de longueur 3 reliant les sommets C à E

C–F–D–E ; C–A–D–E ; C–B–A–E ; C–B–F–E ; C–B–D–E

<u>Exercice 2</u> (5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN* par: $\begin{cases} U_1 = 800 \\ U_{n+1} = 0{,}7U_n + 300 \end{cases}$

1) a) Soit la propriété suivante P: " pour entier naturel non nul n on a : $U_n \le 1000$ "

- Pour n=1 , on a $U_1 = 800 \le 1000$ donc P est vraie à l'ordre 1.
- Soit n entier naturel fixé ,

  Supposons que P est vraie a l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre n+1

  On a $U_n \le 1000$ donc $0{,}7U_n + 300 \le 0{,}7 \times 1000 + 300$

  donc $U_{n+1} \le 1000$ D'ou P est vraie à l'ordre n+1

Donc pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \le 1000$

b) $U_{n+1} - U_n = 0{,}7U_n + 300 - U_n = 0{,}7U_n - U_n + 300 = -0{,}3U_n + 300 = 0{,}3\underbrace{(1000 - U_n)}_{\substack{\ge 0 \\ \text{car } U_n \le 1000}}$

$U_{n+1} - U_n \ge 0$ Donc la suite (U_n) est croissante.

c) On a la suite (U_n) est croissante et majorée par 1000. Donc la suite (U_n) est convergente ..

2) On considère la suite (V_n) définie sur IN* par : $V_n = 1000 - U_n$

a) Pour tout entier naturel non nul n ; $V_{n+1} = 1000 - U_{n+1}$

$V_{n+1} = 1000 - (0{,}7U_n + 300)$

$= 1000 - 0{,}7U_n - 300$

$= 700 - 0{,}7U_n = 0{,}7(1000 - U_n) = 0{,}7.V_n$

Pour tout entier naturel non nul; $V_{n+1} = 0{,}7.V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison q=0,7

b) (V_n) est une suite géométrique de raison q=0,7 et de premier terme $V_1 = 1000 - U_1$=200

Donc $V_n = q^{n-1}.V_1$= 200. $(0,7)^{n-1}$

c) On a pour tout entier naturel non nul n

$V_n = 1000 - U_n$ équivaut à $U_n = 1000 - V_n$

équivaut à $U_n = 1000 - 200.(0,7)^{n-1}$

équivaut à U_n= 200. $(5 - (0,7)^{n-1})$

Alors pour tout entier naturel non nul n U_n= 200. $(5 - (0,7)^{n-1})$

3) On a U_n= 200. $(5 - (0,7)^{n-1})$

le nombre de clients du magasin dépasse 990 Alors U_n= 200. $(5 - (0,7)^{n-1}) \geq 990$

équivaut à $(5 - (0,7)^{n-1}) \geq \frac{990}{200}$

équivaut à $(0,7)^{n-1} \leq 5 - \frac{990}{200}$

équivaut à $(0,7)^{n-1} \leq 0,05$

équivaut à $\ln((0,7)^{n-1}) \leq \ln(0,05)$

équivaut à (n-1) $\ln(0,7) \leq \ln(0,05)$

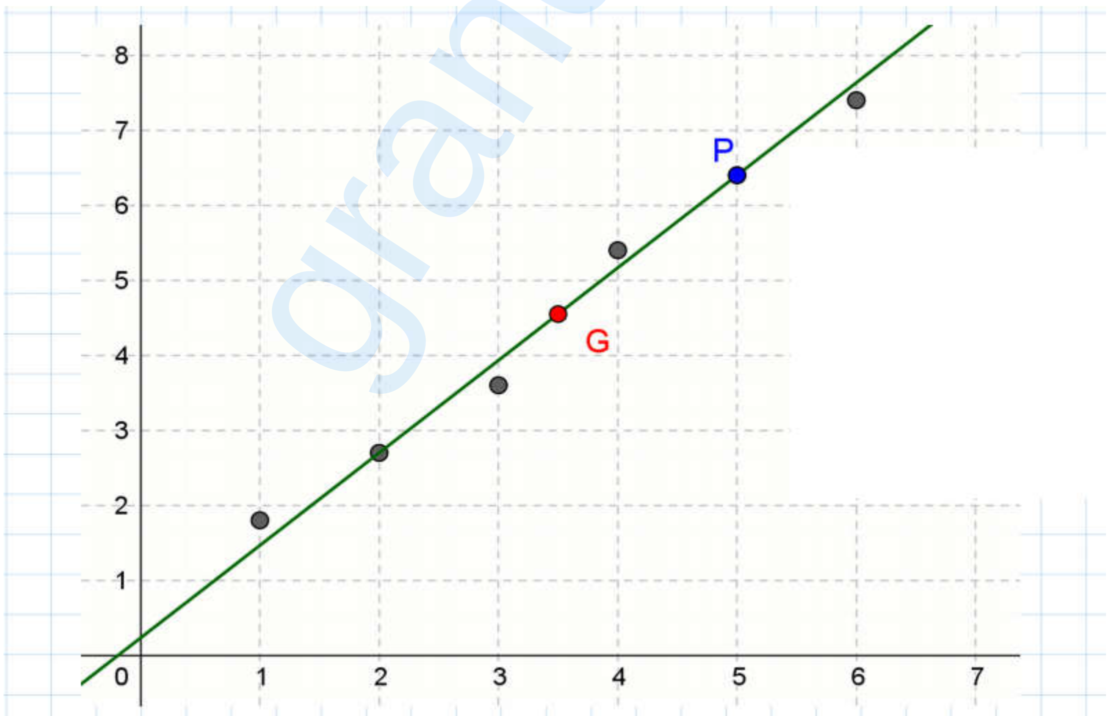
équivaut à (n-1) $\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7}$

équivaut à n $\geq 1 + \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7} \approx 9,399$

D'ou a partir 10ème mois le nombre de clients du magasin dépasse 990?

<u>Exercice 3</u> (4 points)

1) a)



b) Oui, car la forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

2) $\overline{X} = \sum \frac{x_i}{6} =$ 3,5 et $\overline{Y} = \sum \frac{y_i}{6} =$ = 4,55 D'ou G $(3{,}5\ ,\ 4{,}55)$

3) a) on a G $(3{,}5\ ,\ 4{,}55)$ et P $(5\ ,\ 6{,}4)$ voir graphique

b) (GP): y=ax+b

a= $\frac{y_P - y_G}{x_P - x_G} = \frac{6{,}4-4{,}53}{5-3{,}5}$ ≈1,23

Or G ∈ (GP) donc y_G =ax_G +b alors 4,55=1,23× $3{,}5$ +b d'ou b= 4,55-1,23× $3{,}5$ ≈ 0,25

D'ou (GP): y=1,23x+0,25

2004	2014	2024	2034
5	6	7	8

Pour x=8 y=1,23x8 +0,25 = 10,09

La population de la Tunisie e milieux urbains en 2034 est 10,09 millions.

Exercice 4 (6 points)

1) Le signe de g(x) sur $[0, +\infty[$

x	0	∝	+∞
g(x)	+	0	-

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\mathrm{f(x) = x + 1(1-x)e^x}$ On Désigne par C sa courbe representative dans un réper orthonormé (O,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) du plan.

a) Montrer que pour tout x $[0, +\infty[$ on a :$\mathrm{f'(x) = g(x)}$

On a pour tout $x\ de\ [0, +\infty[,\ f(x) = x + (1-x)e^x$

$f'(x) = 1 + (-1)e^x + (1-x)e^x$

$= 1 - e^x + e^x - xe^x \ = 1 - xe^x \ = g(x)$

b) pour x> 0 on a :$f(x) = x + (1-x)e^x = x\left[\frac{x}{x} + \frac{1-x}{x}e^x\right]$

$$= x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\right)e^x\right] = x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x\right]$$

On a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x\right] = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) On a : $g(\propto) = 0 \; donc \; 1 - \propto e^{\propto} = 0 \;\; donc \;\; \propto e^{\propto}$=1. Donc $\propto e^{\propto} = 1$.

Donc $e^{\propto} = \frac{1}{\propto}$

On a : $f(\propto) = \propto + (1 - \propto)e^{\propto} = \propto + e^{\propto} - \propto e^{\propto} = \propto + \frac{1}{\propto} - 1 = \frac{\propto * \propto}{\propto} + \frac{1}{\propto} - \frac{\propto}{\propto} \frac{\propto^2 + 1 - \propto}{\propto}$

d'où $f(x) = \frac{\propto^2 - \propto + 1}{\propto}$

3) On a $f'(x) = g(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de g(x)

x	0		$\propto$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
			$f(\propto)$		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	1				$-\infty$

En effet : $f(0) = 0 + (1 - 0)e^0 = 1 * 1 = 1$

4/a)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x\right]}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Donc la courbe C admet une branche parabolique de direction celle de la droite (O,$\vec{j}$) au voisinage de $+\infty$

b) Déterminer une équation de la demi- tangente T à C au point d'abscisse 0

$$T: y = f'(0)(x - 0) + f(0) \; et \; x \geq 0$$

On a : $f'(0) = g(0) = 1 - 0 * e^0 = 1 \; et \; f(0) = 1$

Donc $T: y = 1 * x + 1 = x + 1 \; et \; x \geq 0$

D'où $T = \begin{cases} y = x + 1 \\ \quad et \\ x \geq 0 \end{cases}$

c) Tracer C et T dans (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) (On prendra $a = 0{,}6$ et on arrondira $f(a)$ à 10^{-1} prés)

$$\propto = 0{,}06 : f(x) \approx 1{,}2666 \;\; à \; 10^{-1} \; f(\propto) = 1{,}3$$

5) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\mathrm{F(x)} = (2-\mathrm{x})\mathrm{e^x} + \frac{\mathrm{x^2}}{2}$

a) Vérifier F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

Pour $x \in [0,+\infty[$,on a :

$$F^{'}(x) = (-1) + (2-x)e^x + \frac{2x}{2}$$
$$= -e^x + (2-x)e^x + x$$
$$= (-1+2-x)e^x + x$$
$$= (1-x)e^x + x$$
$$= x + (1-x)e^x$$
$$= f(x)$$

On a : $F^{'}(x) = f(x)\ \ pour\ \ x \in [0,+\infty[$ Donc F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$

b) En déduire en unités d'aires ,L'aire A de la partie du plan délimitée C à l'axe de abscisses et les droites d'équations $\mathrm{x} = 0$ et $\mathrm{x} = 1$

On a : $A = \int_0^1 |f(x)|dx$

On a $f(1) = 1 + (1-1)e^1 = 1\,, donc\ f(x) \geq 0$

Pour $x \in [0{,}1]\ donc\ A = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (2-1)e^1 + \frac{1^2}{2} - \left[(2-0)e^0 + \frac{0^2}{2}\right]$

D'où A $= e + \frac{1}{2} - 2 = e - \frac{3}{2}$ U.a