Exercice 1

1) a) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$.

b) $A \times B = 3I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}B = I_3$.

Donc A est inversible et sa matrice inverse est :$A^{-1} = \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2) a) On désigne par : x : le nombre de pantalons coudés de type P_1.

y : le nombre de pantalons coudés de type P_2.

z : le nombre de pantalons coudés de type P_3.

- L'atelier confectionne 400 pantalons, donc : $\boldsymbol{x + y + z = 400}$.
- Le coût de couture d'un pantalon de type P_1 est égal à 8 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_2 est égal à 16 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_3 est égal à 20 $dinars$ et le coût total pour la couture de ces pantalons est égal à 5680 $dinars$, donc :
  $8x + 16y + 20z = 5680$ soit $\boldsymbol{2x + 4y + 5z = 1420}$
- La longueur du tissu d'un pantalon de type P_1 est égal à 1 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_2 est égal à 1,2 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_3 est égal à 1,6 m et la longueur total du tissu pour confectionner ces pantalons est égal à 492 m, donc :
  $x + 1{,}2y + 1{,}6z = 492$ soit $\boldsymbol{5x + 6y + 8z = 2460}$

Ainsi la situation se traduit par le système (S): $\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2x + 4y + 5z = 1420 \\ 5x + 6y + 8z = 2460 \end{cases}$

b) • La matrice du système : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

- La matrice des inconnues : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- La matrices des constantes : $C = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$

L'écriture matricielle du système (S) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = C$.

c) $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

Le nombre de pantalons coudés de type P_1 est 140.

Le nombre de pantalons coudés de type P_2 est 160.

Le nombre de pantalons coudés de type P_3 est 100.

Exercice 2

1) a)

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	4	4	5	2	4	4

b) Le graphe (Γ) est connexe et seulement deux de ses sommets sont de degré impair, donc il admet une chaîne eulérienne.

c) Le graphe (Γ) est connexe mais ses sommets ne sont pas tous de degré pair, donc il n'admet pas un cycle eulérien.

2) La matrice associée à ce graphe : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) a) Il y a 6 chaînes de longueur 3 joignant le sommet A à lui-même, donc $M^3 = P$.

b) Il y a 10 chaînes de longueur 3 joignant le sommet F au sommet G.

Exercice 3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

• $-x \in \mathbb{R}$

• $f(-x) = e^{-x} - e^{x} - x = -(e^{x} - e^{-x} + x) = -f(x)$

Donc la fonction f est impaire.

2) a) • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x} - e^{-x} + x = \lim_{x\to+\infty} e^{x} - \frac{1}{e^{x}} + x = +\infty.$

Car $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0.$

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{xe^{x}} + 1 = +\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x}} = 0.$

<u>Interprétation graphique :</u> la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction elle de l'axe $(O,\vec{j})$

b) Les fonctions $x \mapsto e^{x}$, $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x$sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f'(x) = e^{x} + e^{-x} + 1 > 0$ car $e^{x} > 0$ et $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) f est impaire et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) a) $f'(x) = e^{x} + e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $x \longmapsto e^{x}$et $x \longmapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f' et dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f"(x) = e^{x} - e^{-x}$.

$f"(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{x} = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f(0) = 0$.

$f"$ s'annule en 0 et change de signe, donc O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Une équation de la tangente T à la courbe (C) au point O est :

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = 3x$.

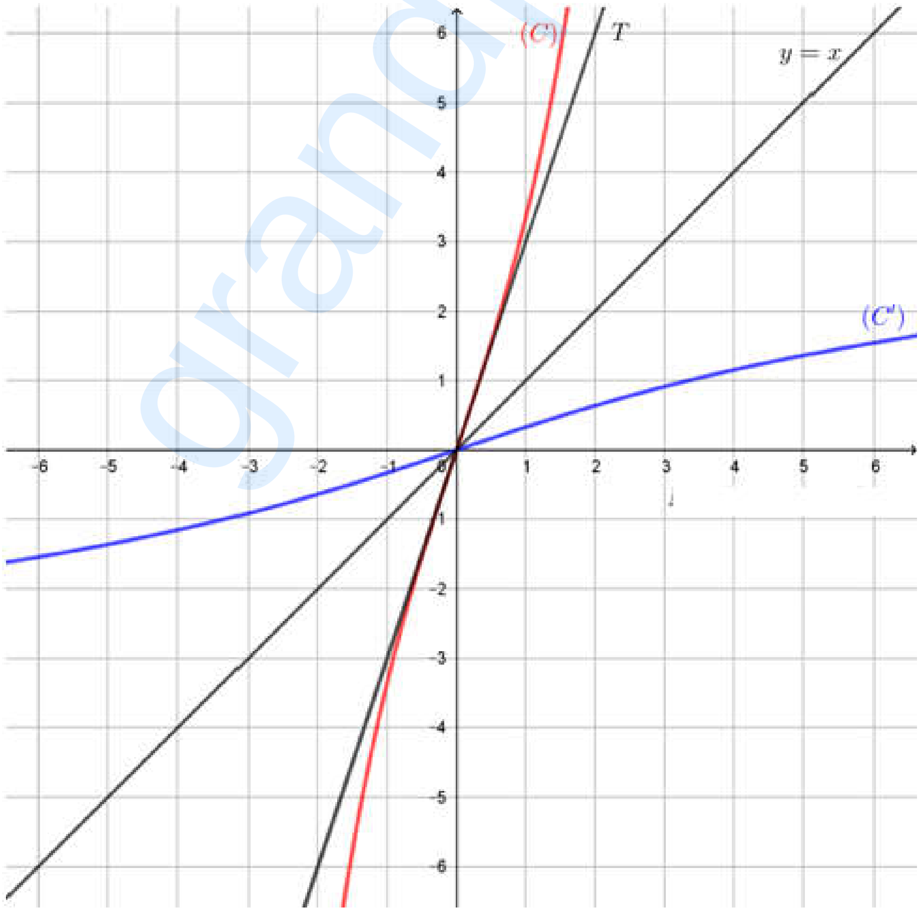
4) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

b) $f(0) = 0$.

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3 \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en 0.

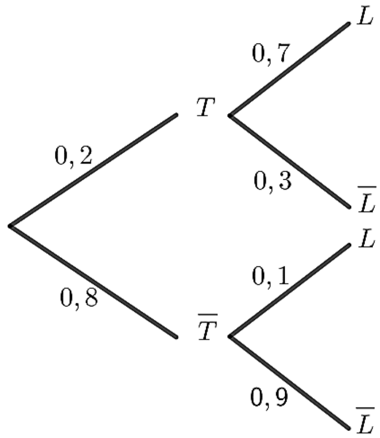
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

5) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exercice 4

1) a) L'arbre pondéré :



b) $p(T \cap L) = p(L/T) \times p(T) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

c) Appliquons la formule des probabilités totales :

$p(L) = p(L \cap T) + p(L \cap \overline{T}) = 0{,}14 + p(L/\overline{T}) \times p(\overline{T}) = 0{,}14 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}22$.

d) La probabilité pour que le client achète un tapis ou un lustre :

$p(L \cup T) = p(L) + p(T) - p(L \cap T) = 0{,}22 + 0{,}2 - 0{,}14 = 0{,}28$.

2) a) Un client achète au plus un tapis et un lustre.

Dépense (en dinars) : x_i	0	50	150	200
$p(X = x_i) = p_i$	0,72	0,08	0,06	0,14

- $p_1 = p(X = 0) = p(\overline{L} \cap \overline{T}) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$.
- $p_2 = p(X = 50) = p(L \cap \overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$.
- $p_3 = p(X = 150) = p(\overline{L} \cap T) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$.
- $p_4 = p(X = 200) = p(L \cap T) = 0{,}14$.

b) L'espérance mathématique de X :

$E(X) = 0 \times 0{,}72 + 50 \times 0{,}08 + 150 \times 0{,}06 + 200 \times 0{,}14 = 41$.

41désigne la dépense moyenne d'un client en dinars.