

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
b	a	c	a

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2^n}{3+2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n(\frac{1}{2^n}+1)}{2^n(\frac{3}{2^n}+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{3}{2^n}+1} = 1, \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e-1}{e}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1-\frac{1}{e}\right)^n = 0, \text{ car } 0 < 1-\frac{1}{e} < 1.$$

3) X suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

On a donc pour tout réel positif t, $p(X > t) = e^{-0,2t}$. D'où $p(X > 10) = e^{-0,2 \times 10} = e^{-2} = 0,135\dots$

L'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est égal à 0,14.

4) Y suit une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=\frac{1}{3}$.

$$\text{L'écart type } \sigma(Y) = \sqrt{8 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 2

1) Soit dans \mathbb{C} l'équation (E): $2z^2 - (1+i(\sqrt{3}-2))z + \sqrt{3}-i = 0$.

a) Vérifions que $(-i)$ est une solution de l'équation (E) :

$$2(-i)^2 - (1+i(\sqrt{3}-2))(-i) + \sqrt{3}-i = -2+i - (\sqrt{3}-2) + \sqrt{3}-i = -2+i - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} - i = 0.$$

D'où $(-i)$ est une solution de l'équation (E).

b) Soit z_2 l'autre racine de l'équation (E).

- On peut utiliser la somme des racines :

$$\begin{aligned} -i + z_2 &= \frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2)) \Rightarrow z_2 = i + \frac{1}{2}(1+i(\sqrt{3}-2)) \\ &\Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+2i+i(\sqrt{3}-2)) \\ &\Rightarrow z_2 = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

- On peut utiliser le produit des racines :

$$(-i) \cdot z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{(-i)} \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i) = \frac{1}{2}i(\sqrt{3} - i) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$c) z_1 = -i = \cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2) Les points A(a) ; B(b) ; E(1) et F(-i) où $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$.

a) Voir figure.

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]. \text{ D'où la construction du point A.}$$

$$\begin{aligned} b) b - a &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = i\left(i + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i(i+a) = i(a+i). \end{aligned}$$

Ainsi on a : $b - a = i(a + i)$.

$$\begin{aligned} c) b - a = i(a + i) &\Rightarrow \frac{b-a}{a+i} = i \\ &\Rightarrow \arg\left(\frac{b-a}{a-(-i)}\right) \equiv \arg(i)[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) + \pi \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{aligned}$$

D'où le triangle ABF est rectangle en A.

$$\begin{aligned} b - a = i(a + i) &\Rightarrow |b - a| = |i(a + i)| \\ &\Rightarrow |b - a| = |i||a + i| \\ &\Rightarrow |b - a| = |a - (-i)| \\ &\Rightarrow AB = AF \end{aligned}$$

D'où le triangle ABF est isocèle de sommet principal A.

Ainsi le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

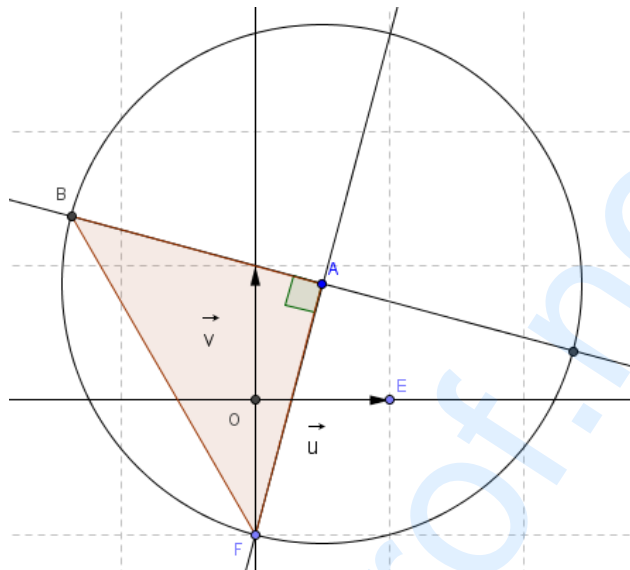
3) Le triangle ABF est rectangle et isocèle en A.

On a $AB = AF$, d'où le point B appartient au cercle (C) de centre A et passant par F.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, d'où B appartient à la droite Δ perpendiculaire à (AF) en A.

Ainsi B appartient à l'intersection de Δ et (C).

Cette intersection contient deux points, mais un seul point vérifie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.



Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points $A(2,0,1)$, $B(0,2,1)$ et $C(1,2,0)$.

$$1) a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$, d'où les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés. D'où ils déterminent un plan P dont un vecteur normal est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Ainsi une équation de P est de la forme $-2x - 2y - 2z + c = 0$.

$$A(2, 0, 1) \in P \Rightarrow -2 \times 2 - 2 \times 0 - 2 \times 1 + c = 0 \\ \Rightarrow c = 6.$$

$$P: -2x - 2y - 2z + 6 = 0$$

$$P: x + y + z - 3 = 0.$$

Autrement : il suffit de vérifier que chacun des points A, B et C vérifie l'équation du plan $P: x + y + z - 3 = 0$ et puisque les points ne sont pas alignés donc P est le plan qu'ils déterminent.

2) Soit S la sphère d'équation : $S: x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

a) $2^2 + 0^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow A(2,0,1) \in S$; $0^2 + 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow B(0,2,1) \in S$.

$1^2 + 2^2 + 0^2 = 5 \Rightarrow C(1,2,0) \in S$.

b) Le plan P est déterminé par les points A, B et C. La sphère S passe par ces trois points. D'où l'intersection de la sphère S avec le plan P est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$. Q le plan passant D et parallèle au plan P.

a) Le plan Q est parallèle au plan P, d'où une équation cartésienne du plan Q est de la forme $x + y + z + c = 0$.

$$D\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \in Q \Rightarrow 3\sqrt{\frac{5}{3}} + c = 0 \Rightarrow c = -3\sqrt{\frac{5}{3}}. \text{ Ainsi } Q: x + y + z - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = 0.$$

b) On a O est le centre de la sphère S. Calculons la distance de O au plan Q :

$$d(O, Q) = \frac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}}\right|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{5} = \text{le rayon de la sphère. D'où le plan Q est tangent à la sphère S.}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} = 5. \text{ D'où le point D appartient à la sphère S.}$$

Par conséquent le plan Q est tangent à la sphère S au point D.

4) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace n'appartenant pas au plan P.

a) $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overline{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$

$$(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM} = -2(x-2) - 2y - 2(z-1) = -2x - 2y - 2z + 6.$$

b) Le volume V du tétraèdre MABC :

$$V = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM}| = \frac{1}{6} |-2x - 2y - 2z + 6| = \frac{|x + y + z - 3|}{3}.$$

c) Soit $M(x, y, z)$ un point du plan Q. On a $x + y + z - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = 0$.

$$x + y + z - 3\sqrt{\frac{5}{3}} = 0 \Rightarrow x + y + z = 3\sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{|x + y + z - 3|}{3} = \frac{\left|3\sqrt{\frac{5}{3}} - 3\right|}{3} = \left|\sqrt{\frac{5}{3}} - 1\right| = \sqrt{\frac{5}{3}} - 1.$$

Exercice 4

f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x(1 - \ln x)^2 + 1 ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

(C) la courbe représentative f de dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x)^2 + 1 = +\infty$; car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 - \ln x)^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x)^2 + \frac{1}{x} = +\infty.$$

D'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe (O, \vec{j}) .

2)a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(\sqrt{x})^2)^2$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2 = 0$; car $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln t = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln x)^2 + 1$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - 2\ln x + \ln^2 x) + 1$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2x \ln x + x \ln^2 x + 1$
 $= 1$; car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$, d'où f est continue à droite en 0.

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x)^2 = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs.

3) Γ est la courbe de la fonction dérivée f' de f.

a) Le signe de f' est donné par la position de la courbe Γ par rapport à l'axe des abscisses. On a :

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+

Le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{1}{e}$	e	$+\infty$
f(x)	1	$f(\frac{1}{e})$	1	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \left(1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 + 1 = \frac{4}{e} + 1$$

b) On remarque que la courbe Γ de f' admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1. Donc f'' s'annule en 1.

D'après la courbe Γ la fonction f' est décroissante dans $]0, 1[$ et croissante dans $[1, +\infty[$, donc f'' change de signe de part et d'autre de 1.

f'' s'annule en 1 en changeant de signe, d'où le point d'abscisse 1, c'est-à-dire A, est un point d'inflexion pour la courbe (C) de f .

4) Voir figure.

5) Soit $0 < \lambda < 1$.

A_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ de la fonction dérivée f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \frac{1}{e}$.

$$A_\lambda = \int_\lambda^{\frac{1}{e}} f'(x) dx = [f(x)]_\lambda^{\frac{1}{e}} = f\left(\frac{1}{e}\right) - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda).$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{4}{e} + 1 - f(\lambda) = \frac{4}{e} + 1 - 1 = \frac{4}{e}; \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = 1.$$

