Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

<table>
<tr><td>I)</td><td>II)</td><td colspan="2">III)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b)</td><td rowspan="2">c)</td><td>1)</td><td>2)</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>b)</td></tr>
</table>

I) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ normal à P, donc la droite (AB) est orthogonale au plan P, donc sécante avec le plan P.

III)1) H est le projeté orthogonal de O sur le plan Q, donc H appartient au plan Q, par conséquent le cas b) est à éliminer. Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ normal à Q, seul le cas en a) qui vérifie.

2) $OH=\sqrt{3}<2,$ d'où l'intersection du plan Q avec la sphère S est un cercle.

Exercice 2

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+2(\sqrt{3}-i)\,z-4i\sqrt{3}=0.$

1)a) $(2\sqrt{3}+2i)^2=(2\sqrt{3})^2+2\times2\sqrt{3}\times2i+(2i)^2=12+8i\sqrt{3}-4=8+8i\sqrt{3}$

b) $(E): z^2+2(\sqrt{3}-i)\,z-4i\sqrt{3}=0.$

On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta&=\left[2(\sqrt{3}-i)\right]^2-4\times(-4i\sqrt{3})=4(3-2i\sqrt{3}-1)+16i\sqrt{3}\\&=8+8i\sqrt{3}\\&=(2\sqrt{3}+2i)^2\end{aligned}$$

D'où une racine de Δ est $\delta=2\sqrt{3}+2i.$

$$z_1=\frac{-2(\sqrt{3}-i)-(2\sqrt{3}+2i)}{2}=-2\sqrt{3}$$

$$z_2=\frac{-2(\sqrt{3}-i)+(2\sqrt{3}+2i)}{2}=2i$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-2\sqrt{3}\;;\;2i\right\}.$$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. A et B les points d'affixes respectives $z_A=-2\sqrt{3}$ et $z_B=\sqrt{3}-3i.$

a) Pour montrer que le triangle OAB est isocèle en O, il suffit de vérifier que $OA=OB.$

$$OA = |z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad ; \quad OB = |z_B| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

On a $OA = OB$, d'où le triangle OAB est isocèle en O.

b) Le triangle OAB est isocèle en O, donc $OA = OB$ et par conséquent le point B appartient au cercle Γ de centre O et passant par A. D'autre part l'ordonnée du point B est (-3), donc B appartient à la droite Δ d'équation $y = -3$. Ainsi le point B appartient à l'intersection du cercle Γ et de la droite Δ. Il y a deux point d'intersection, mais on sait que l'abscisse du point B est positive, d'où la construction du point B.

3) C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2i$ et $z_D = -\dfrac{z_B}{2}$.

a) $$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = \frac{z_B - \left(-\dfrac{z_B}{2}\right)}{-2\sqrt{3} - 2i} = \frac{\dfrac{3}{2} z_B}{-2\sqrt{3} - 2i} = -\frac{3}{4}\,\frac{z_B}{\sqrt{3} + i}$$
$$= -\frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} + i} = -\frac{3}{4}\,\frac{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$
$$= -\frac{3}{4}\,\frac{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = -\frac{3}{4}\,\frac{3 - 3i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} i.$$

Le nombre complexe $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur, donc les vecteurs $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. Par suite les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

b) $$\text{Aff}(\overrightarrow{AD}) = z_D - z_A = -\frac{z_B}{2} - (-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i + 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i).$$
$$\text{Aff}(\overrightarrow{AC}) = z_C - z_A = 2i - (-2\sqrt{3}) = 2i + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{3} + i).$$

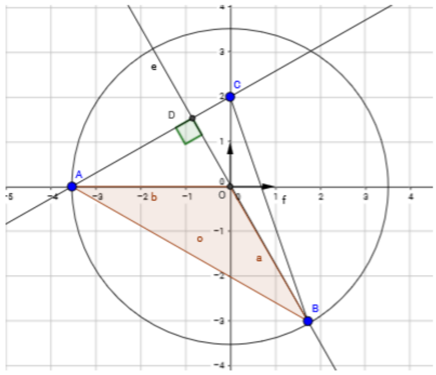
On a : $$\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AD})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})} = \frac{\dfrac{3}{2}(\sqrt{3} + i)}{2(\sqrt{3} + i)} = \frac{3}{4}.$$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par conséquent les points A, D et C sont alignés.

c) On place le point C dans le plan muni du repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les points A, C et D sont alignés, d'où le point D appartient à la droite (AC).

On sait déjà que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires, ainsi D est l'intersection de la droite (AC) et la perpendiculaire à (AC) passant par B. D'où la construction du point D.



d) On sait que l'aire d'un triangle est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, la hauteur est associée au côté considéré comme base. L'aire du triangle ABC est :

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{|z_C - z_A| \times |z_D - z_B|}{2} = \frac{\left|-2\sqrt{3} - 2i\right| \times \left|\frac{3}{2} z_B\right|}{2}$$

$$= \left|\sqrt{3} + i\right| \times \frac{3}{2} \times |z_B| = 2 \times \frac{3}{2} \times \sqrt{12} = 6\sqrt{3} \text{ unité d'aire}.$$

Exercice 3

La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - u_n} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < \sqrt{2}.$

- $u_0 = 0 < \sqrt{2}$, l'inégalité est vérifiée pour $n = 0.$
- Soit n un entier naturel. Supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire que $u_n < \sqrt{2}.$
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1.$ On a $u_n < \sqrt{2}.$

$$\begin{aligned} u_n < \sqrt{2} \ &\Rightarrow -u_n > -\sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2\sqrt{2} - u_n > \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2} - u_n} > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} > \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow u_{n+1} < \sqrt{2} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1.$

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < \sqrt{2}.$

b) Montrons que la suite u est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} - u_n = \frac{2 - (2\sqrt{2} - u_n)u_n}{2\sqrt{2} - u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n + 2}{2\sqrt{2} - u_n} = \frac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2} - u_n}.$$

On a $u_n < \sqrt{2}$ d'où $2\sqrt{2} - u_n > 0$ et $\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2 > 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Cela prouve que la suite u est croissante.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{2}$, donc la suite u est minorée par $\sqrt{2}$.

La suite est croissante et elle est majorée, donc elle est convergente.

Soit l la limite de la suite u.
On peut remarquer que la suite u est positive et majorée par $\sqrt{2}$, donc

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{2} - x}$.

La fonction f est continue sur $\left[0, \sqrt{2}\right]$ et la suite u converge vers l, donc $f(l) = l$.

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = \frac{2}{2\sqrt{2} - l}$$

$$\Leftrightarrow l(2\sqrt{2} - l) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2l\sqrt{2} - l^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2l\sqrt{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(l - \sqrt{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l = \sqrt{2}.$$

D'où la suite u converge vers $\sqrt{2}$.

2) La suite v est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{\sqrt{2} - u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{2} - u_n}}{\sqrt{2} - \dfrac{2}{2\sqrt{2} - u_n}}$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - u_n\right) - 2} = \frac{2}{\sqrt{2}\left(2\sqrt{2} - u_n - \sqrt{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - u_n\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n} = \dfrac{\sqrt{2} - u_n + u_n}{\sqrt{2} - u_n} = 1 + \dfrac{u_n}{\sqrt{2} - u_n} = 1 + v_n$.

D'où v est une suite arithmétique de raison 1.

c) v est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{\sqrt{2} - u_0} = 0$, car $u_0 = 0$.

D'où $v_n = v_0 + n \times r$, où r est la raison de la suite v
$= n$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n$.

$$v_n = n \iff n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n} \;;\; n \in \mathbb{N}$$
$$\iff n\left(\sqrt{2} - u_n\right) = u_n$$
$$\iff n\sqrt{2} - n\,u_n = u_n$$
$$\iff n\sqrt{2} = (n+1)u_n$$
$$\iff u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$$

Ainsi $u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \ln(u_n)$ et $S_n = W_1 + W_2 + ... + W_n$.

a) $S_n = W_1 + W_2 + ... + W$

$$= \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ln(u_3) + ... + \ln(u_n)$$
$$= \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) + \ln(\frac{2\sqrt{2}}{3}) + \ln(\frac{3\sqrt{2}}{4}) + ... + \ln(\frac{(n-1)\sqrt{2}}{n}) + \ln(\frac{n\sqrt{2}}{n+1})$$
$$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times ... \times \frac{(n-1)\sqrt{2}}{n} \times \frac{n\sqrt{2}}{n+1}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n+1}\right) = n\ln\sqrt{2} - \ln(n+1) = \frac{1}{2}n\ln 2 - \ln(n+1)$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln(n+1)}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n} = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$. C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} -2x + x\ln(x+1) = +\infty$; car $\lim_{x\to(-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x + x\ln(x+1) = \lim_{x\to+\infty} x\left[-2 + \ln(x+1)\right] = +\infty$, car $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -2 + \ln(x+1) = +\infty.$$

La courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

2)a) $f(x) = -2x + x\ln(x+1)$, $x \in]-1, +\infty[$.

$$f'(x) = -2 + \ln(x+1) + x\frac{1}{x+1} = -2 + \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$
$$= \frac{-2(x+1)+x}{x+1} + \ln(x+1) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1).$$

b) Le tableau de variation de la fonction f' dérivée de f est :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On peut déterminer le signe de f' à partir de son tableau de variation :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

c) Le tableau de variation de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3)a) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha+2}{\alpha+1} + \ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$

$$f(\alpha) = -2\alpha + \alpha\ln(\alpha+1) = -2\alpha + \alpha\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$
$$= \frac{-2\alpha(\alpha+1)+\alpha(\alpha+2)}{\alpha+1} = \frac{-2\alpha^2-2\alpha+\alpha^2+2\alpha}{\alpha+1} = \frac{-\alpha^2}{\alpha+1} = g(\alpha).$$

b) Voir figure.

4)a) $f(x) = -2x + x\ln(x+1),\ x \in]-1, +\infty[.$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + x\ln(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x[-2 + \ln(x+1)] = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(x+1) = 2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x+1 = e^2$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e^2 - 1.$$

Les points d'intersection de la courbe C_f et l'axe des abscisses sont O et le point de coordonnées $(e^2-1, 0)$.

b) Voir figure.

5)a) Soit $x > -1$; $g(x) = \frac{-x^2}{x+1} = \frac{1-x^2-1}{x+1} = \frac{(1-x)(1+x)-1}{x+1} = 1 - x - \frac{1}{x+1}.$

b) $\int_0^\alpha g(x)\,dx = \int_0^\alpha \left(1 - x - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1)\right]_0^\alpha = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(\alpha+1) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

c) $\int_0^{\alpha} x\ln(1+x)\,dx$?

On pose $u(x)=\ln(1+x) \Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$v'(x)=x \Rightarrow v(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

Par une intégration par parties on a :

$$\int_0^{\alpha} x\ln(1+x)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^{\alpha}+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{-x^2}{1+x}dx=\frac{1}{2}\alpha^2\ln(1+\alpha)+\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}g(x)\,dx.$$

d) A l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

$$A=\int_0^{\alpha}-f(x)\,dx=\int_0^{\alpha}\left[2x-x\ln(1+x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\alpha}2x\,dx-\int_0^{\alpha}x\ln(1+x)\,dx$$

$$=\left[x^2\right]_0^{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha^2\ln(1+\alpha)-\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}g(x)\,dx$$

$$=\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\alpha+2}{\alpha+1}-\frac{1}{2}\left[\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right]$$

$$=\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\alpha^2\frac{\alpha+2}{\alpha+1}+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

$$=\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2-1)\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

$$=\frac{3\alpha^2(\alpha+1)-2\alpha(\alpha+1)-2(\alpha^2-1)(\alpha+2)}{4(\alpha+1)}=\frac{\alpha^3-3\alpha^2+4}{4(\alpha+1)}$$