Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	c	a	a	b

1) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = 2\,\vec{i} \wedge 4\vec{k} = 8\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -8\ \vec{j}$

2) La droite (BD) est parallèle à la droite (FH) du plan (FHC), d'où elle est parallèle à ce plan.

La droite (BD) est strictement parallèle au plan (FHC) car D n'appartient pas à ce plan

3) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\ =\ \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AB}\ .\overrightarrow{EG}$

$$= \ 3\vec{j} \wedge 2\,\vec{i}\ .\ \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG}\ = 6\ \ \vec{j} \wedge \vec{i}\ .\ 3\vec{j} + 2\,\vec{i}$$

$$= -6\vec{k}.\ 3\vec{j} + 2\,\vec{i}\ = -18\ \ \vec{k}.\vec{j}\ -12\ \ \vec{k}.\vec{i}\ = 0$$

4) On peut remarquer que le plan Q n'est autre que le plan (GHD) et que D est le projeté orthogonal de A sur ce plan, aussi que $AD = 3$. Ainsi l'intersection de la sphère S avec le plan Q est le cercle de centre D et de rayon $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.

Exercice 2

1)a) $(E) : z^2 -\ 1 + i(2+\sqrt{3})\ z - 2(\sqrt{3} - i) = 0.$

On prend $z = 2i$:

$(2i)^2 -\ 1 + i(2+\sqrt{3})\ 2i - 2(\sqrt{3} - i) = -4 -\ 2i - 2(2+\sqrt{3})\ - 2\sqrt{3} + 2i$

$$= -\,4 - 2i + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2i = 0.$$

D'où $2i$ est une solution de l'équation (E).

b) On a la somme des deux solutions est $1 + i(2+\sqrt{3}) = 2i + 1 + i\,\sqrt{3}$. D'où l'autre solution est $1 + i\,\sqrt{3}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$$z_A = 1 + i\,\sqrt{3}\ ;\ z_B = 2i\ \text{ et }\ z_I = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}.$$

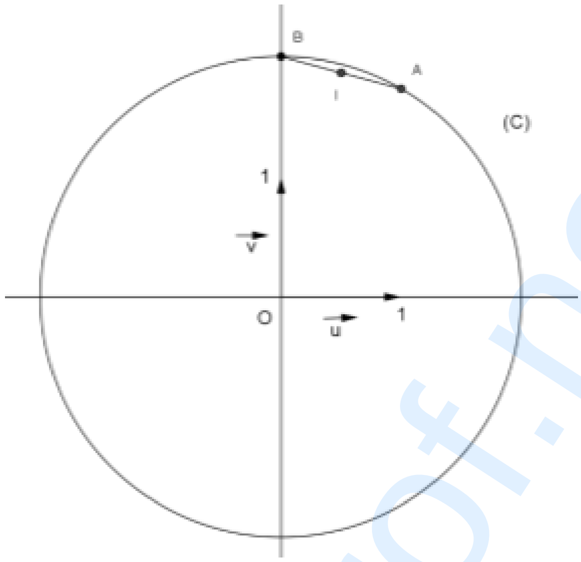
a) $z_A = 1 + i\,\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_B = 2i = 2\ e^{i\frac{\pi}{2}}$.

b) $OA = |z_A| = 2$; $OB = |z_B| = 2$; d'où les points A et B sont sur le cercle (C) de centre O et de rayon 2.

c) $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

$\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 2i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2} = z_I$. D'où I est lemilieu du segment [AB].

d)



3)a) Le triangle AOB est isocèle en O puisque les points A et B sont sur le cercle (C), I est le milieu du côté [AB], d'où [OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

b) $$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}, \vec{u} + \vec{u}, \overrightarrow{OB} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

$$= \overrightarrow{OA}, \vec{u} + \vec{u}, \overrightarrow{OB} + 2k\pi$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ; \ ; \ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $$\vec{u}, \overrightarrow{OI} = \vec{u}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, OI est la bissectrice de AOB donc $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$

$$= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$$

d) On a $z_I = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.

$$|z_I| = \left|\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

D'autre part $\arg(z_I) = \vec{u}, \overrightarrow{OI} + 2k\pi = \dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi \;;\; k \in \mathbb{Z}$.

D'où $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}\; e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

4) $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}\; e^{i\frac{5\pi}{12}} = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} + i\,\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \\ \sin\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $0, +\infty$ par $\begin{cases} f(x) = -x + 2x\ln x \text{ si } x \in 0, +\infty \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -x + 2x\ln x = 0 = f(0)$.

D'où f est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x+2x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -1 + 2\ln x = -\infty$.

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

La courbe (C) de f admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x + 2x\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\;\; -1 + 2\ln x \;\; = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+2x\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -1 + 2\ln x = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, d'où la courbe (C) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3)a) $f(x) = -x + 2x\ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$f'(x) = -x + 2x\ln x\ ' = -1 + 2\ln x + 2x\frac{1}{x} = 1 + 2\ln x, \text{ pour tout } x \in 0, +\infty.$$

b) $f'(x) = 1 + 2\ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

c) $f(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + 2\sqrt{e}\ln(\sqrt{e}) = -\sqrt{e} + 2\sqrt{e}\,\frac{1}{2} = -\sqrt{e} + \sqrt{e} = 0.$

d) $f(x) = -x + 2x\ln x$, pour tout $x \in 0, +\infty$

$$f(x) = x\ ;\ x \in 0, +\infty \quad \Leftrightarrow -x + 2x\ln x = x\ ;\ x > 0$$
$$\Leftrightarrow -2x + 2x\ln x = 0\ ;\ x > 0$$
$$\Leftrightarrow 2x\ -1 + \ln x\ = 0\ ;\ x > 0$$
$$\Leftrightarrow -1 + \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = e$$

D'où le deuxième point d'intersection de la courbe (C) et la droite Δ d'équation $y = x$ est le point de coordonnées (e, e).

e) Voir graphique.

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[\sqrt{e}, +\infty[$ et (C_1) la courbe de g.

a) g est continue et strictement croissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, d'où elle réalise une bijection de $[\sqrt{e}, +\infty[$ sur $g\left([\sqrt{e}, +\infty[\right) = 0, +\infty$. Ainsi g admet une fonction réciproque définie sur l'intervalle $J = 0, +\infty$.

b) Voir graphique.

5)a) On peut remarquer que $(E') \cup (E) \cup (E_1)$, où (E_1) est le symétrique de la partie (E) par rapport à Δ, forme la partie limitée par le carré de côté e. Si on exprime cette relation par les aires on obtient :

$$\text{aire(carré)} = \text{aire(E')} + \text{aire(E)} + \text{aire}(E_1)$$
$$\Leftrightarrow e^2 = A' + 2A$$
$$\Leftrightarrow A' = e^2 - 2A$$

b) $\int_{\sqrt{e}}^{e} (x\ln x)\,dx$; par une intégration par parties :

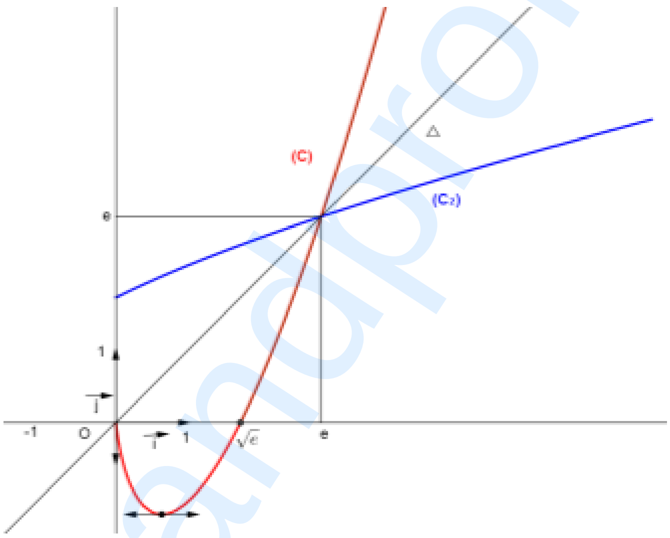
On pose : $u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} (x\ln x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_{\sqrt{e}}^{e} - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}}^{e} x\,dx = \left(\frac{1}{2}e^2\ln e\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{e}^2\ln\sqrt{e}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{e}}^{e}$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}(e^2 - e) = \frac{1}{4}e^2.$$

c) On a $A = \int_{\sqrt{e}}^{e} (x\ln x)\,dx = \frac{1}{4}e^2$ et $A' = e^2 - 2A$, d'où $A' = e^2 - \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}e^2$ u.a

Le graphique :



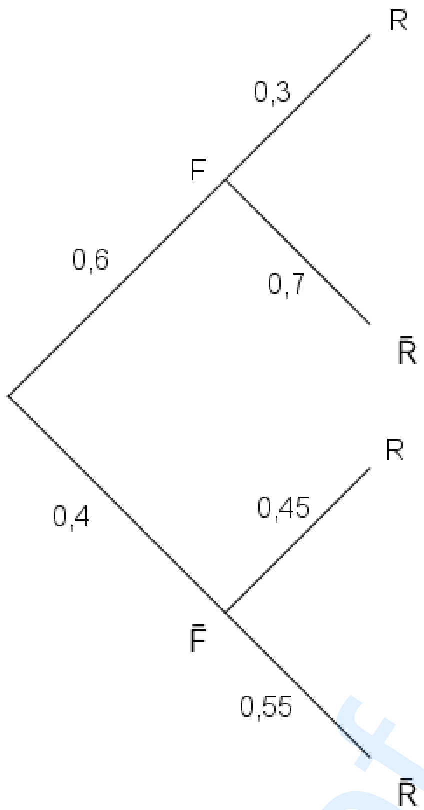
Exercice 4

1) On a les évènements suivants :

F « le relevé de notes choisi est celui d'une fille ».
R « le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat ».

- 60% des élèves admis sont des filles, donc $p(F) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$
- 30% parmi les filles admises sont rachetées, donc $p(R/F) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$
- 45% parmi les garçons admis sont rachetés, donc $p(R/\overline{F}) = \frac{45}{100} = 0{,}45.$

2) L'arbre pondéré traduisant la situation :



3)a) Soit p la probabilité que le relevé de notes choisi soit d'un garçon admis sans rachat.

$$p(\bar{F} \cap \bar{R}) = p(\bar{F}).p(\bar{R} / \bar{F}) = 0,4 \times 0,55 = 0,22.$$

b) $p(R) = p(F).p(R / F) + p(\bar{F}).p(R / \bar{F}) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,45 = 0,18 + 0,18 = 0,36.$

c) Le relevé de notes choisi est celui d'un élève admis avec rachat, la probabilité que ce relevé de notes soit celui d'un garçon est

$$p(\bar{F} / R) = \frac{p(\bar{F} \cap R)}{p(R)} = \frac{p(\bar{F}).p(R / \bar{F})}{p(R)} = \frac{0,4 \times 0,45}{0,36} = \frac{0,18}{0,36} = \frac{1}{2}.$$

4) On se ramène à un tirage successif et avec remise de 20 relevés. La situation peut se ramener à une loi binomiale X de paramètre 20 et $0,36$.

On a $p(X = k) = C_{20}^{k}\ (0,36)^{k}(0,64)^{20-k}$; $k \in\ 0, 1, 2, ..., 20$.

a) p_1 la probabilité que deux exactement de ces élèves soient admis avec rachat.

$p_1 = p(X = 2) = C_{20}^{2}\ (0,36)^{2}(0,64)^{18} = 190 \times (0,36)^{2}(0,64)^{18}.$

b) p_2 la probabilité qu'au moins un de ces élèves soient admis avec rachat.

$p_2 = p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,64)^{20}.$