Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences Techniques*)

Session principale 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit -il ?

*** Résolution d'une équation du second degré dans IC**

*** Recherche d'ensembles de points.**

*** Complexe et géométrie.**

1) a) $\left(1-2i\sqrt{2}\right)^2=1-2\times1\times2i\sqrt{2}+\left(2i\sqrt{2}\right)^2=1-4i\sqrt{2}-4\times2=1-4i\sqrt{2}-8=-7-4i\sqrt{2}$

b) $\Delta=1^2-4\times1\times\left(2+i\sqrt{2}\right)=1-8-4i\sqrt{2}=-7-4i\sqrt{2}=\left(-2i\sqrt{2}\right)^2$; $\boxed{S=1-2i\sqrt{2}}$

$$z'=\frac{1-\left(1-2i\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{-2+2i\sqrt{2}}{2}=\boxed{-1+i\sqrt{2}}$$

$$z''=\frac{-1+\left(1-2i\sqrt{2}\right)}{2}=\frac{-2i\sqrt{2}}{2}=\boxed{-i\sqrt{2}}$$

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{-1+i\sqrt{2}\ ;\ -i\sqrt{2}\right\}$$

2) $\dfrac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\dfrac{-i\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{-1+i\sqrt{2}-i\sqrt{2}}=\dfrac{-2i\sqrt{2}}{-1}=2i\sqrt{2}$

Donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$, donc ABC est un triangle rectangle en C, ainsi $C\in\ell_{[AB]}$.

3) a) $z'=\dfrac{z+1-i\sqrt{2}}{z+i\sqrt{2}}=\dfrac{z-\left(-1+i\sqrt{2}\right)}{z-\left(i\sqrt{2}\right)}=\dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}$

Donc $z'\in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{AM}$

Ainsi $M \in \zeta_{[AB]}$

b) $|z'|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z_{\overrightarrow{BM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right|=1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM}=1 \Rightarrow MA=MB.$

Ainsi $M \in$ med $[AB]=\Delta$.

4) a) $z_{E'}=\dfrac{z_E+1-i\sqrt{2}}{z_E+i\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+1-i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+i\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}+\frac{1}{2}+i\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{i\left[\sqrt{2}-\frac{1}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right]}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}+i\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)}=-i$

b) D'après 3) a) $z_{E'}=-i\in i\mathbb{R}\Rightarrow E'\in\zeta$

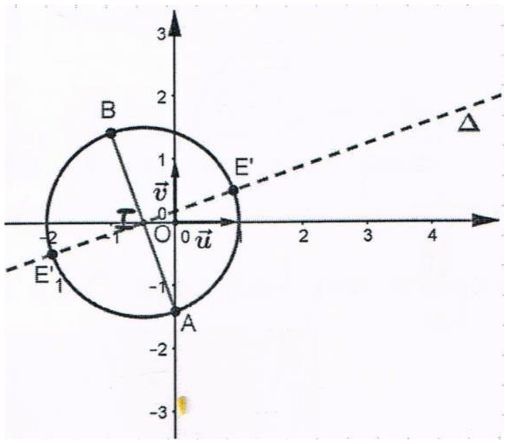
D'après 3) b) $|z_{E'}|=1\Rightarrow E'\in\Delta$ donc $E'\in\zeta\cap\Delta$

* Le deuxième point E_1' est le symétrique de E'

par rapport I = A * B donc A * B = E' * E'_1

$$\Leftrightarrow \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{z_{E'} + z_{E'_1}}{2} \Leftrightarrow Z_{E'_1} = z_A + z_B - z_{E'}$$

Donc $z_{E'_1} = \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} i$ Ainsi $\Delta \cap \zeta = \{E' ; E'_1\}$



Exercice 2 :

De quoi s'agit -il ?

*** Produit vectoriel**

*** Plan défini par trois points non alignés**

***Equations (cartésienne et paramétriques) de plans – Positions relatives de 2 plans**

*** Equation réduite d'une sphère –Position relative d'une sphère et d'un plan**

*** Intersection de 3 plans.**

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, d'où A, B et C ne sont pas alignés, ainsi A, B et C définissent un plan P.

c) * $2 \times 0 - (-1) + 0 - 1 = 0$ donc $A \in P$
* $2 \times 1 - 1 + 0 - 1 = 0$ donc $B \in P$
* $2 \times 0 - 0 + 1 - 1 = 0$ donc $C \in P$

ainsi (AB) = P

Autrement

* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P donc P : $2x - y + z + d = 0$

Or $A(0, -1, 0) \in P$ sig $2 \times 0 - (-1) + 0 + d = 0$ sig $d = -1$

Ainsi P : $2x - y + z - 1 = 0$.

2) $\overrightarrow{M_Q}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du Q.

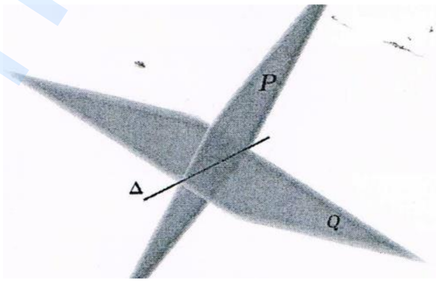
$\overrightarrow{M_P}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal du P.

et $\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{vmatrix}=-1-2=-3\neq 0$, donc $\overrightarrow{M_Q}$ et $\overrightarrow{M_p}$ ne sont pas colinéaires,

ainsi P et Q sont sécantes suivant une droite Δ.

$* \ \Delta = P \cap Q : \begin{cases}2x-y+z-1=0\\x+y-2z+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\2\alpha-y+z-1=0\\\alpha+y-2z+1=0\end{cases} (\alpha\in IR) \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y-z=2\alpha-1(1)\\y-2z=-\alpha-1(2)\end{cases} (\alpha\in IR)$



$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=z+2d-1\\z=3\alpha\end{cases} (\alpha\in IR) \Leftrightarrow \begin{cases}x=\alpha\\y=5\alpha-1\\z=3\alpha\end{cases} (\alpha\in IR)$

3) a) S : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + \frac{4}{3}=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=\frac{4}{3}+1^2+1^2=\frac{2}{3}>0$

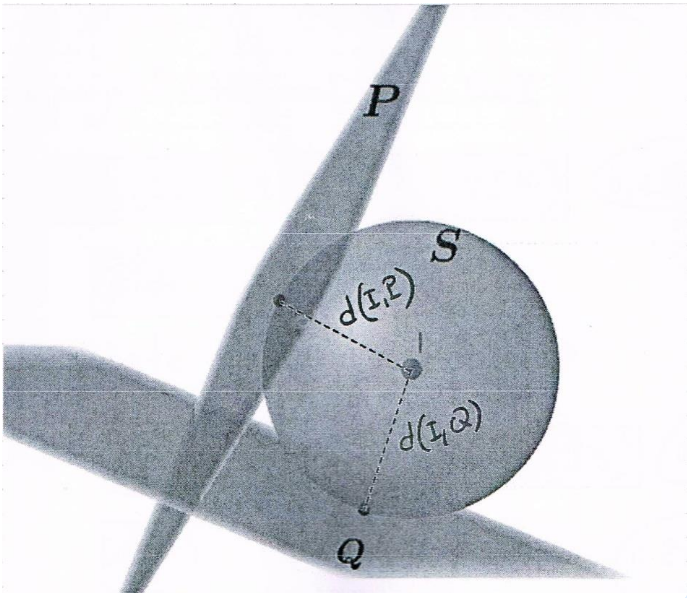
Ainsi S est une sphère de centre I(-1, 0, 1) et de rayon $R=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $* \ d(I,P)=\frac{|P_I|}{\|\overrightarrow{M_P}\|}$ avec $P_I=2\times(-1)-0+1-1=-2$ et $\|\overrightarrow{M_P}\|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

$* \ d(I,Q)=\frac{|Q_I|}{\|\overrightarrow{M_P}\|}$ avec $Q_I=-1+0-2+1=-2$ et $\|\overrightarrow{M_Q}\|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$

Donc $d(I, P) = d(I,Q) = \frac{2}{\sqrt{6}}=R$

Ainsi S est tangente à chacun des plan P et Q.



4) a)

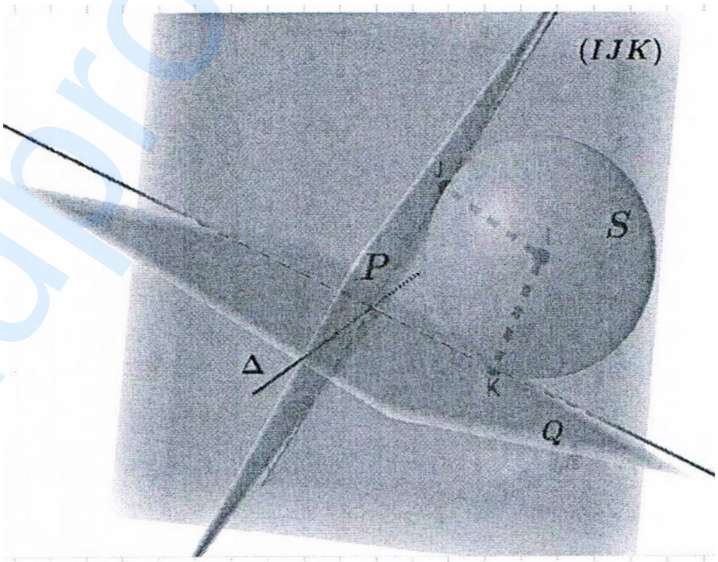
* J le projeté orthogonal de I sur P

Donc $P \perp (IJ)$ or $(IJ) \subset (IJK)$, ainsi $P \perp (IJK)$

* K le projeté orthogonal de I sir Q

Donc $Q \perp (IJ)$ or $(IK) \subset (IJK)$

Ainsi $Q \perp (IJK)$



b) On a : $\begin{cases} P \cap Q = \Delta \\ P \perp (IJK) \\ Q \perp (IJK) \end{cases}$

donc $\Delta \perp (IJK)$

ainsi $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et aussi est un vecteur normal à (IJK),

donc (IJK) : $x + 5y + 3z + d = 0$

or $I(-1, 0, 1) \in (IJK)$ sig $-1 + 0 + 3 + d = 0$ sig $d = -2$

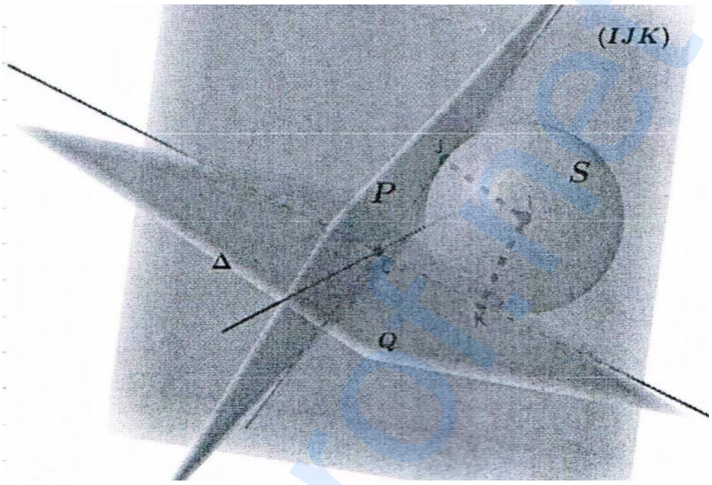
ainsi (IJK) : $x + 5y + 3z - 2 = 0$

c)

* $P \cap Q \cap (IJK) = \{L(x, y, z)\} \Leftrightarrow \Delta \cap (IJK) = \{L(x, y, z)\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L \in (IJK) \\ L \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y+3z-2=0 \\ x=\alpha \\ y=5\alpha-1 \\ z=3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{1}{5} \\ x=\dfrac{1}{5} \\ y=0 \\ z=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

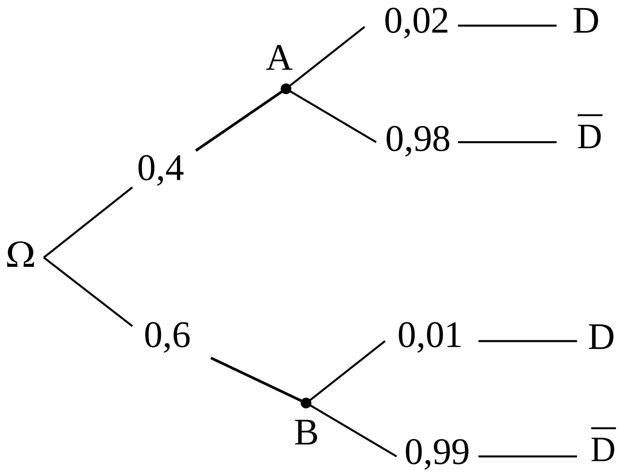
Ainsi $L\left(\dfrac{1}{5}, 0, \dfrac{3}{5}\right)$.



Exercice 3 :

De quoi s'agit -il ?

Probabilité : Probabilités conditionnelles – Arbre de choix – Probabilités composées – Probabilités totales – Variable aléatoire – Espérance mathématique.



1) a) * $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,4 = 0,6$

* $p(D / A) = \dfrac{2}{100} = 0,02$

* $p\left(\overline{D}/A\right)=1(p(D/A)=1-0,02=0,98$

* $p(D / B) = \dfrac{1}{100} = 0,01$

* $p\left(\overline{D}/B\right)=1-p(D/B)=1-0,01=0,99$

b) $p(D) = p(D \cap A) + p(D \cap B)$

$= 0,02 \times 0,4 + 0,01 \times 0,6 = 0,014$

c) $p(A/D) = \dfrac{p(AD)}{p(D)} = \dfrac{0,02 \times 0,4}{0,01} \simeq 0,571$

2) * Le nombre de circuits présentant un défaut est : $1000 \times p(D) = 10000 \times 0,014 = 140$

* Le nombre de circuits sans défaut est : $10\,000 - 140 = 9860$

Ainsi le bénéfice moyen réalisé chaque semaine est :

$p(\overline{D}) \times 0,3 + p(D) \times (-0,5) = 9860 \times 0,3 + 140 \times (-0,5) = 2888$ DT

<u>Autrement :</u>

On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique de chaque circuit.

Donc $X(\Omega) = \{-0,5 ; 0,3\}$.

* $p(X = -0,5) = p(D) = 0,014$
* $p(X = 0,3) = 1 - p(D) = 1 - 0,014 = 0,986$
* La loi de X est donnée par le tableau suivant

x_i	-0,5	0,3
$p(X = x_i)$	0,014	0,986

* Donc le bénéfice moyen pour chaque circuit est :

$E(X) = -0,5 \times 0,014 + 0,3 \times 0,986 = 0,2888$ DT

* Ainsi le bénéfice moyen réalise chaque semaine est : $10000 \times E(X) = 2888$ DT

<u>Exercice 4 :</u>

De quoi s'agit -il ?

Fonction logarithme – Théorème des valeurs intermédiaires – Position relative de deux courbes – Calcul d'aires.

1) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$

$$g'(x) = -1 - \frac{2}{x} < 0$$

x	0		1		$+\infty$
g'(x)			–		
g(x)		↘		↘	

b) g(1) = -1 + 1 – 2ln1 = 0

x	0		1		$+\infty$
g'(x)		+		–	
g(x)		↘	0	↘	

x	0		1		$+\infty$
g(x)		+	0	-	

2) a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} x+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0 \end{array}\right\}$ alors $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$

L'axe des ordonnées est asymptote à (ζ).

b) $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x^2} = 0+0=0$

l'axe des abscisses est asymptote à (ζ) au voisinage de $+\infty$.

3) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ est $\forall x \in]0, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right).x^2 - 2x\left(x+\ln x\right)}{x^4} = \frac{x^2+x-2x^2-2x\ln x}{x^4} = \frac{-x^2+x-2x\ln x}{x^4}$$

$$= \frac{x\left(-x+1-2\ln x\right)}{x^4} = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) Le signe de f'(x) est celui de g(x) sur $]0, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

$f(1) = \frac{1+\ln 1}{1^2} = 1$

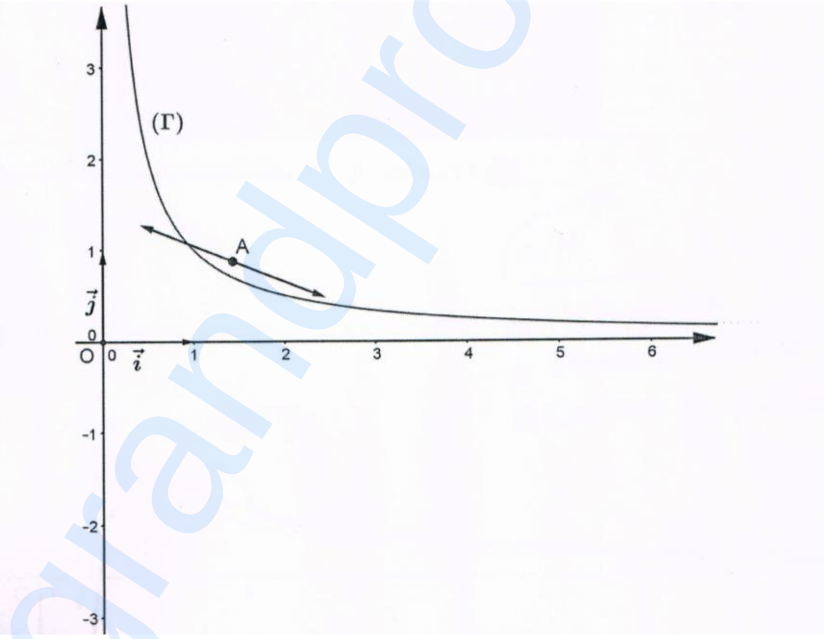
c) * $\forall x \in [1, +\infty[$; $f(x) > 0$, donc $\forall x \in [1, +\infty[$ $f(x) \neq 0$

* f est continue est strictement croissante sur $]0, 1]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $\left]-\infty, 1\right]$, donc f(x) admet une unique solution $\beta \in]0, 1]$

Ainsi $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution β.

$\left.\begin{array}{l} f(0{,}56) \simeq 0{,}6 < 0 \\ f(0{,}57) \simeq 0{,}02 > 0 \end{array}\right\}$ alors $\beta \in]0{,}56 ; 0{,}57[$

4)

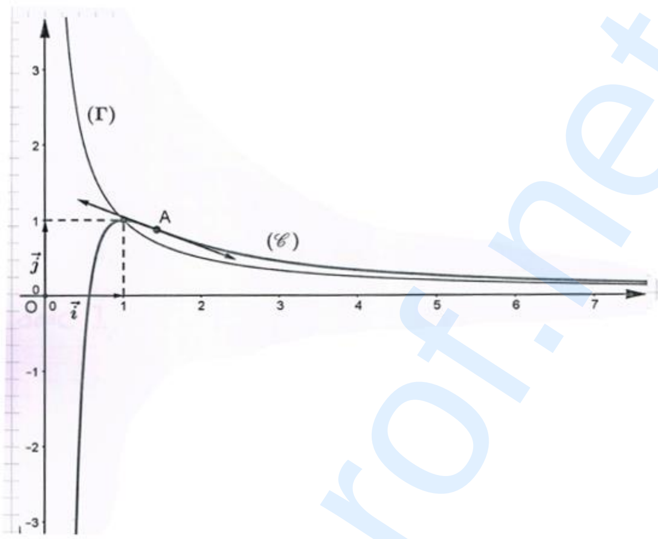


a) $\forall x \in]0, +\infty[$; $f(x) - h(x) = \frac{x+\ln x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x^2}$

Le signe de $f(x) - h(x)$ est celui de ln x.

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - h(x)$	-		+
Position relative de ζ et Γ	ζ est au dessous de Γ	$\zeta \cap \Gamma = \{(1, 1)\}$	ζ est au dessus de Γ

b)



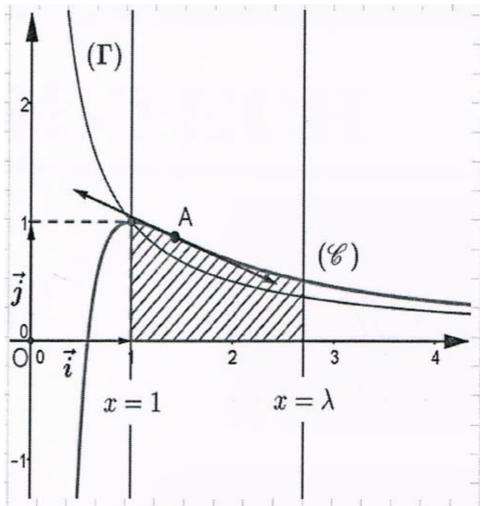
5) a) $I_\lambda = \int_1^\lambda |f(x)-h(x)|dx\,(ua) = \int_1^\lambda f(x)-h(x)\,dx$

$$= \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2}dx$$

Posons $u(x) = \ln x \leftrightarrow u'(n) = \frac{1}{x}$

$V(x) = -\frac{1}{x} \leftrightarrow V''(x) = \frac{1}{x^2}$

U, V, U' et V' sont continues sur $[0, \lambda]$



Donc $I_\lambda = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^\lambda + \int_1^\lambda \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \frac{\ln\lambda}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}-\left(-\frac{\ln 1}{1}-\frac{1}{1}\right)$

$$= =1-\frac{1}{\lambda}(1+\ln\lambda)$$

b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} 1-\frac{1}{\lambda}-\frac{\ln\lambda}{h}=1$