Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences Techniques)

Session de contrôle 2018

Exercice n°1 : (5,5 points)

1. $z^2+(2+i)z+i=0$

   On a $\Delta=(2+i)^2-4i=3$ d'où $\delta=\sqrt{3}$

   Donc $z'=\frac{-2-i-\sqrt{3}}{2}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ et $z''=\frac{-2-i+\sqrt{3}}{2}=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

   $S_{\mathbb{C}}=\{z';z''\}$

2. $(E):z^3+(1+i)z^2-2z-i=0$

   a. On a $1^3+(1+i)1^2-2-i=0$ d'où $z_0=1$ est une solution de (E)

   b. On a $z^3+(1+i)z^2-2z-i=(z-1)(z^2+az+b)=z^3+z^2(a-1)+z(b-a)-ib$

   Par identification $\begin{cases} a-1=1+i \\ b-a=-2 \\ -b=-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2+i \\ b=i \end{cases}$

   donc $z^3+(1+i)z^2-2z-i=(z-1)(z^2+(2+i)z++i)$

   c. On a

   $z^3+(1+i)z^2-2z-i=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+(2+i)z++i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-1=0 \\ z^2+(2+i)z++i=0 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow z=1$ ou $z'=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ou $z'=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

3. O

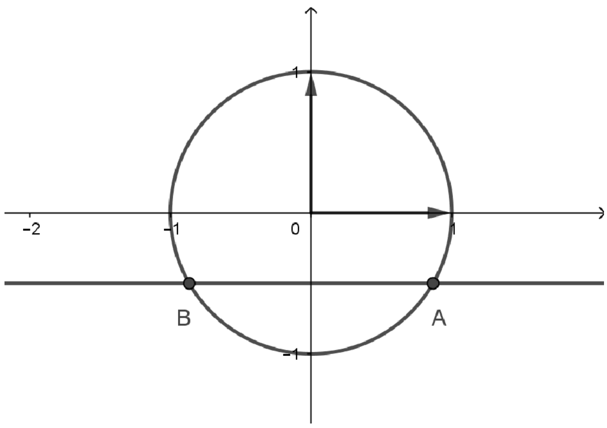
   a. On a $z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

   $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

   b. On a $|z_A|=|z_B|=1 \Leftrightarrow OA=OB=1$ donc A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1

   c.

   On a $y_A=y_B=-\frac{1}{2}$ et $x_A>0$ et $x_B<0$ et A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1

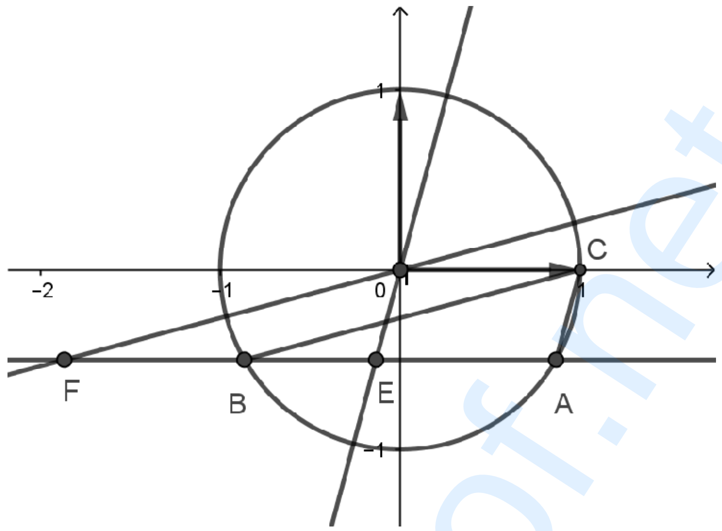


4.

a. On a $aff\left(\overrightarrow{CA}\right)=z_A-z_C=z_A-1=z_E=aff\left(\overrightarrow{OE}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OE}$ et puisque O, A et C non alignés donc $OEAC$ est un parallélogramme

On a $aff\left(\overrightarrow{CB}\right)=z_B-z_C=z_B-1=z_F=aff\left(\overrightarrow{OF}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OF}$ et puisque O, B et C non alignés donc $OFBC$ est un parallélogramme

b.



c. On a $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}+e^{i\frac{-7\pi}{12}}\right)=e^{i\pi}+e^{i\frac{-2\pi}{12}}=-1+e^{i\frac{-\pi}{6}}$

et $e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{-\pi}{12}}\right)=e^{i\frac{7\pi}{6}}+e^{i\frac{12\pi}{12}}=e^{i\frac{7\pi}{6}}-1$

d. On a $z'=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=-1+e^{i\frac{7\pi}{6}}=e^{i\frac{13\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{-\pi}{12}}\right)=2e^{i\frac{13\pi}{12}}\cos\frac{\pi}{12}$

$\left(0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}\ donc\ \cos\frac{\pi}{12}>0\right)$

On a

$z'=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=-1+e^{i\frac{-\pi}{6}}=e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{7\pi}{12}}+e^{i\frac{-7\pi}{12}}\right)=2e^{i\frac{5\pi}{12}}\cos\frac{7\pi}{12}=-2\cos\frac{7\pi}{12}e^{i\frac{17\pi}{12}}$

$\left(\frac{\pi}{2}<\frac{7\pi}{12}<\pi\ donc\ \cos\frac{\pi}{12}<0\right)$

<u>Exercice n°2 :</u> (4,5 points)

1.

a. La fonction $f:x\mapsto\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$ est dérivable sur $[0;2]$

et pour tout $x\in[0;2]$, $f'(x)=\dfrac{\frac{3}{4}\times 2x}{2\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}=\dfrac{3}{4}\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}$

b. Soit $x\in[0;2]$,on a $x^2-\left(\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}\right)^2=x^2-\frac{3}{4}x^2-1=\frac{1}{4}x^2-1=\frac{1}{4}\left(x^2-4\right)\leq 0$

car $\left(0\leq x\leq 2\ donc\ 0\leq x^2\leq 4\right)$ donc $x^2\leq\left(\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}\right)^2$ d'où $x\leq\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$

car $x\in[0;2]$

c. Pour tout $x\in[0;2]$, $0\leq x\leq\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$ donc $0\leq\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}\leq 1$

d'où $0\leq\dfrac{3}{4}\dfrac{x}{\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}}\leq\dfrac{3}{4}$ ainsi $0\leq f'(x)\leq\dfrac{3}{4}$

d. On a f est dérivable sur $[0;2]$et pour tout $t\in[0;2]$, $0\leq f'(t)\leq\frac{3}{4}$ donc

pour $x\in[0;2]$ d'après le théorème des inégalités des accroissements

finies on a $0\leq f(2)-f(x)\leq\frac{3}{4}(2-x)$

donc $0\leq 2-f(x)\leq\frac{3}{4}(2-x)$ pour tout $x\in[0;2]$

2.

a. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$

Pour $n=0$, on a $u_0=1$ donc $0<u_0<2$ vérifiée

Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $0<u_n<2$ et montrons que $0<u_{n+1}<2$

On a $0<u_n<2$ et puisque f est croissante

donc $f(0)<f(u_n)<f(2)$ d'où $0<1<u_{n+1}<2$ donc $0<u_{n+1}<2$

conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0<u_n<2$

b. On a pour tout $x\in[0;2]$, $0\leq 2-f(x)\leq\frac{3}{4}(2-x)$ et puisque $u_n\in[0;2]$

pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $0\leq 2-f(u_n)\leq\frac{3}{4}(2-u_n)$

d'où $0\leq 2-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(2-u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Pour $n=0$, on a $2-u_0=2-1=1=\left(\frac{3}{4}\right)^0$, vérifiée

Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$

Montrons que $0\leq 2-u_{n+1}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

On a $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $0\leq(2-u_n)\times\frac{3}{4}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

et puisque $0\leq 2-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(2-u_n)$ donc $0\leq 2-u_{n+1}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$

d. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ car $-1<\frac{3}{4}<1$ et puisque $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $0\leq 2-u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n$ donc $-2\leq -u_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^n-2$ ainsi

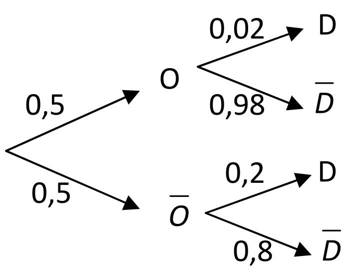
$2-\left(\frac{3}{4}\right)^n\leq u_n\leq 2$ par suite $\sum\limits_{k=0}^{n-1}2-\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k\leq\sum\limits_{k=0}^{n-1}u_k\leq\sum\limits_{k=0}^{n-1}2$

donc $2n-\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\right)\leq S_n\leq 2n$ d'où $2n-4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\leq S_n\leq 2n$ et par

suite $2-\frac{4}{n}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\leq\frac{S_n}{n}\leq 2$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{4}{n}\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right)=2$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=2$

<u>Exercice n°3 :</u> (4 points)



1.

a. On a $p(D\cap O)=p(O)p(D/O)=0,5\times 0,02=0,01$

b. On a $p(D\cap \overline{O})=p(\overline{O})p(D/\overline{O})=0,5\times 0,2=0,1$

c. On a $p(\overline{D})=1-p(D)=1-\left(p(D\cap O)+p(D\cap \overline{O})\right)=1-(0,01+0,1)=0,89$

2. E : « Les quatre bougies soient non défectueuses »

$p(E)=\left(p(\overline{D})\right)^4=0,89^4$

3. X : suit une loi exponentielle de paramètre λ

a. La durée de vie moyenne d'une bougies est 40000 donc $\frac{1}{\lambda}=40000$ d'où

$\lambda=\frac{1}{40000}=2,5.10^{-5}$

b. On a $p(20000\le X\le 40000)=e^{-\lambda\times 20000}-e^{-\lambda 40000}=e^{-0,5}-e^{-1}$

c. On a

$$p\left((X\ge 45000)/(X\ge 40000)\right)=\frac{p\left((X\ge 45000)\cap(X\ge 40000)\right)}{p(X\ge 40000)}=\frac{p(X\ge 45000)}{p(X\ge 40000)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda\times 45000}}{e^{-\lambda 40000}}=e^{-\lambda\times 5000}=e^{-0.125}=0,88$$

Exercice n°4 : (6 points)

1.

a. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-xe^{1-x}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-xe^{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-e^{1-x}\right)=-\infty$$

Donc la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

b. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-xe^{1-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{x}{e^x}\times e\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{e}{\frac{e^x}{x}}\right)=1$ donc la droite $\Delta:y=1$ est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $+\infty$

2.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-e^{1-x}-x\left(-e^{1-x}\right)=(x-1)e^{1-x}$

b. $f'(x)=0\Leftrightarrow (x-1)e^{1-x}=0\Leftrightarrow x=1$ d'où

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

3.

a. On a $f(x)-1=-xe^{1-x}=0 \Leftrightarrow x=0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-1$	$+$	0	$-$
Position relatif de (ζ) et Δ	(ζ) au dessus de Δ	$(\zeta)\cap\Delta=\{(0;1)\}$	(ζ) au dessus de Δ

b. Soit T la tangente à (ζ) en $I(2;1-2e^{-1})$ donc $T: y=f'(2)(x-2)+f(2)$ et puisque $f'(2)=\frac{1}{e}$ et $f(2)=1-\frac{2}{e}$ d'où $T: y=\frac{1}{e}(x-2)+1-\frac{2}{e}=\frac{1}{e}x+1-\frac{4}{e}$ donc $T=D$

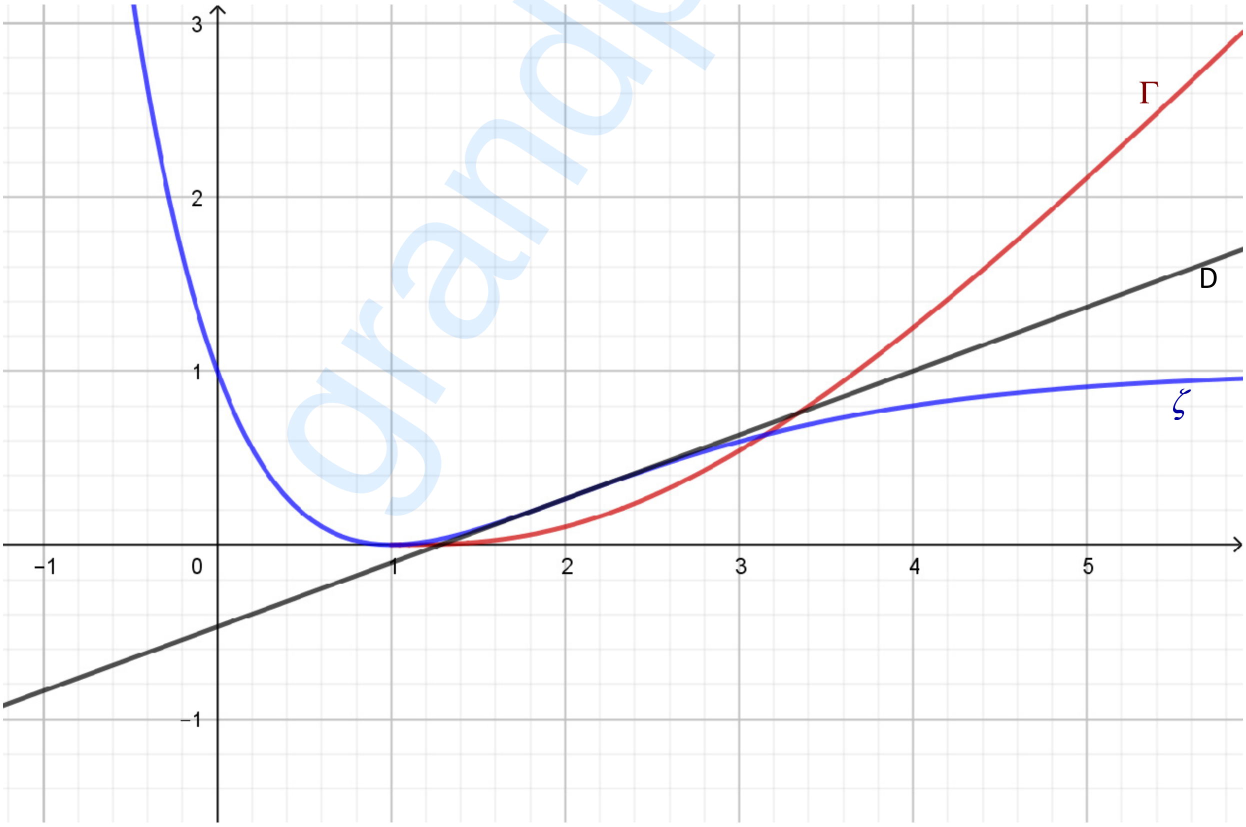
c. On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(x-1)e^{1-x}$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^{1-x}+(x-1)(-e^{1-x})=e^{1-x}(2-x)$

D'où

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

et puisque f'' s'annule en changeant de signe donc $I(2;f(2))$ est un point d'inflexion pour la courbe (ζ)

d.



4.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1-e^{1-x}-f'(x)=1-e^{1-x}-(x-1)e^{1-x}=1-xe^{1-x}=f(x)$

b. On a $A_{\alpha}=\int_1^{\alpha}|f(t)|dt=\int_1^{\alpha}f(t)dt=\int_1^{\alpha}\left(1-e^{1-t}-f'(t)\right)dt=\left[t+e^{1-t}-f(t)\right]_1^{\alpha}$

$$=\left(\alpha+e^{1-\alpha}-f(\alpha)\right)-\left(1+e^{0}-f(1)\right)=\alpha-3+(1+\alpha)e^{1-\alpha}=h(\alpha)$$

c.