EXERCICE 1

I	1	Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.	b
	2	$P(\bar{B}) = p(A) \times p(\bar{B}/A) + p(\bar{A}) \times p(\bar{B}/\bar{A})$ $= 0.2 \times 0.6 + 0.8 \times 0.3 = 0.36$	c
II	1	$\lim_{n\to+\infty} n\,e^{-n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e}{\frac{e^n}{n}} = 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$	a
	2	Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = \left(\frac{-x}{2}\right)^n$ $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{-x}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 2$	b

EXERCICE 2

1) **(E) :** $z^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)z + 2\sqrt{3} = 0$.

a) $(1-i)^2 - (1+i\sqrt{3})(1-i)^2 + 2\sqrt{3} = -2i - (1+i\sqrt{3})(-2i) + 2\sqrt{3} = -2i + 2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$.

Alors $z_1 = 1 - i$, est une solution de (E).

b) Soit z_2 la seconde solution. $z_2(1-i) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2(1+i)\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

<u>Autrement</u> : 1-i $+z_2 = \frac{-[-(1-i)(1+i\sqrt{3})]}{1}$ = 1-i +i $\sqrt{3}$ (1-i)donc : $z_2 = i\sqrt{3}$ (1-i) = $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

2) $z_A = 1 - i$, $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3}$ **et** $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) $z_A = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$,

$1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b). $(i\sqrt{3})z_A = (i\sqrt{3})(1-i) = i\sqrt{3} + \sqrt{3} = z_B$.

Ou : $z_B = \sqrt{3} + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}(1 - i) = i\sqrt{3}z_A$.

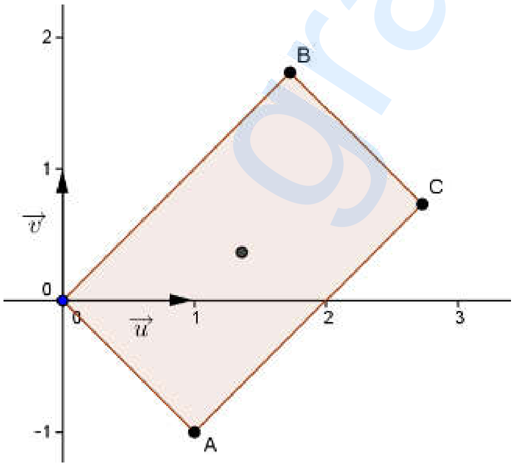
c) $z_A + z_B = z_A + (i\sqrt{3})z_A = (1+i\sqrt{3})z_A = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = z_C$.

d) $z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ **Alors le quadrilatère OACB est un parallélogramme**

De plus $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$d'où OACB est un rectangle.

e)



3).a/ .G centre de gravité du triangle OAI $\Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{O} \Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI}$

$\Leftrightarrow z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_I)$.

b/. $z_I = \frac{1}{2}(z_O + z_C) = \frac{1}{2}z_C$.

$$z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}z_C + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_A + z_A\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1\right)z_A = \frac{3+i\sqrt{3}}{6}z_A$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}+i)z_A$$

c/. $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A = \frac{\sqrt{3}}{6}.2e^{i\frac{\pi}{6}}.\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

EXERCICE 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

$A(2, -2, 2)$, $B(2, 0, 0)$ et $C\left(\frac{6}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$.

1) .a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ -2\\ \frac{8}{5}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\ 0\\ -\frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{4}{5}\times\frac{4}{5} + (-2)\times 0 + \frac{8}{5}\times\left(\frac{-2}{5}\right) = 0$

Alors ABC est un triangle rectangle en C.

b) $x + 2y + 2z - 2 = 0$ est une équation cartésienne d'un plan (π) .

- $x_A + 2y_A + 2\,z_A - 2 = 2 - 4 + 4 - 2 = 0 \; alors\; A \in (\pi)$.
- $x_B + 2y_B + 2\,z_B - 2 = 2 + 2.0 + 2.0 - 2 = 0 \quad B \in (\pi)$.
- $x_C + 2y_C + 2\,z_C - 2 = \frac{6}{5} + 2.0 + 2.\frac{2}{5} - 2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 0 alors \quad C \in (\pi)$.

Or par les trois points non alignés A, B et C ne passe qu'un seul plan.

<u>Conclusion :</u> le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $x + 2y + 2z - 2 = 0$

2)a).

$$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix} \wedge \frac{2}{5}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & -1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & -1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \frac{4}{25}\begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC) alors est un vecteur directeur de Δ.

d'où $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + 2t,\ t \in IR \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

b) $M(x, y, z) \in \quad P \cap \Delta \Leftrightarrow .\begin{cases} x + 2y + 2z - 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$

$4(2+t) + 8(-2+2t) - (2+2t) - 8 = 0 \Leftrightarrow 18t - 18 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ d'où : $P \cap \Delta = \{I(3,0,4)\}$.

c) Soit Ω le centre de la sphère S. S est tangente au plan (ABC) en A alors $\Omega \in \Delta$ d'autre part $\Omega \in P$ alors $\Omega = I$.

Soit R le rayon de la sphère S.

$R = IA = \sqrt{1+4+4} = 3$.

3).a) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ 0 \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\, X \frac{9}{5}(2x1 + 0x0 + \ (-1)x2\,) = \frac{18}{25}(\,2-2) = 0$, Alors le triangle CIB est rectangle en C.

b)Le triangle CIB et rectangle en C et J le milieu de [IB] alors $JC = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

Le triangle ABI et rectangle en A et J le milieu de [IB] alors $JA = JB = JI = \frac{IB}{2}$.

D'où $JA = JB = JI = \frac{IB}{2} = JC$.

Donc I, B, A et C appartiennent à la sphère S' de centre J et de rayon $\frac{IB}{2}$.

c)A, B et C appartiennent à la fois au plan (ABC) et à la sphère S' alors S' coupe (ABC) suivant le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en C donc l'intersection est le cercle de diamètre [AB].

EXERCICE 4

f la fonction définie sur IR par : $f(x) = e^{-x+1} - e^{x-3}$

1) .a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-3} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ **.**

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3}\frac{e^{x}}{x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet au voisinage de +∞ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ dirigée vers le bas.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{1}}{xe^{x}} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

(C) admet au voisinage de -∞ une branche infinie parabolique de direction $(O,\vec{j})$ dirigée vers le haut.

2). **a) f est dérivable sur IR et** $f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3}$ **= - (** $e^{-x+1} + e^{x-3}$) < 0

***pour tout $x \in \mathbb{R}$ par suite f est strictement cropissante sur* IR.**

b).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$			$-$
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

c) $f(2)=0$.
D'après le tableau de variations de f on a :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

<u>Ou autrement</u> : ▪ x≥ 2
f est croissante $\Big\}$ **f(x) ≥ $f(2)$ par suite f(x) ≥ 0 .**
▪ x≤ 2
f est décroissante $\Big\}$ **f(x)≤ $f(2)$ par suite f(x)≤ 0.**

3). a) $f''(x)=\left(-e^{-x+1}-e^{x-3}\right)'=-(-x+1)'e^{-x+1}-(x-3)'e^{x-3}=e^{-x+1}-e^{x-3}=f(x)$ **.**

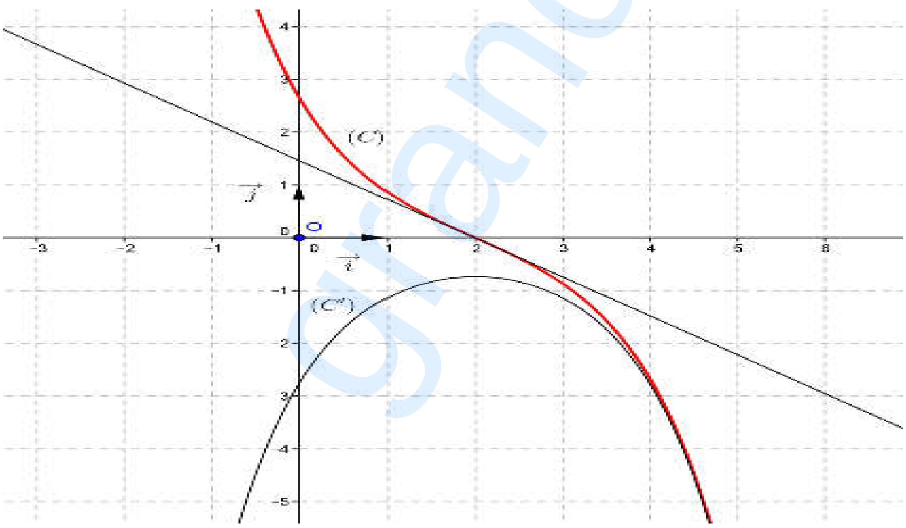
b) f'' s'annule en changeant de signe en 2 et f(2) = 0 alors le point I(2, 0) est un point d'inflexion de (C).

c) Soit T la tangente à (C) en I. $\begin{aligned}T: y&=f'(2)(x-2)+f(2)\\&=-2e^{-1}x+4e^{-1}\end{aligned}$.

4) .a) $f(x)-f'(x)=\left(e^{-x+1}-e^{x-3}\right)-\left(-e^{-x+1}-e^{x-3}\right)=2e^{-x+1}>0$.

Alors (C) est au dessus de (C').

b)voir figure



$-2e^{-1}\times3+4e^{-1}=-2e^{-1}\Rightarrow A\left(3,-2e^{-1}\right)\in T$.

5)a) $A_\lambda=\int_0^\lambda\left|f(x)-f'(x)\right|dx=\int_0^\lambda 2e^{-x+1}dx=\left[-2e^{-x+1}\right]_0^\lambda=2e-2e^{1-\lambda}$.ua .

b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A_\lambda=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(2e-2e^{1-\lambda}\right)=2e$