Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

Section : Lettres

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{3-U_n}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $U_1 = \dfrac{3-U_0}{2} = \dfrac{3-3}{2} = 0.$

$U_2 = \dfrac{3-U_1}{2} = \dfrac{3-0}{2} = \dfrac{3}{2}.$

b) $U_1 - U_0 = 0 - 3 = -3.$

$U_2 - U_1 = \dfrac{3}{2} - 0 = \dfrac{3}{2}.$

On a $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$, d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

2) Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $V_0 = U_0 - 1 = 3 - 1 = 2.$

b) $V_{n+1} = U_{n+1} - 1 = \dfrac{3-U_n}{2} - 1 = \dfrac{3-U_n-2}{2} = \dfrac{1-U_n}{2} = -\dfrac{1}{2}(U_n - 1) = -\dfrac{1}{2}V_n.$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

c) (V_n) est une suite géométrique de raison $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et de premier terme $V_0 = 2$.

On a donc, $V_n = V_0 \times q^n = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

D'autre part $V_n = U_n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où $U_n = V_n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$U_n = V_n + 1 = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 1.$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} V_n + 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 1 = 1$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0.$

Exercice 2

Une urne contient 10 jetons : $\begin{cases} 3 \text{ rouges : A, A, A} \\ 4 \text{ verts : B, B, B, B} \\ 3 \text{ jaunes : C, C, C} \end{cases}$

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac.

1) Soit Ω l'univers des cas possibles. On a $Card(\Omega) = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$.

I : « Obtenir les trois jetons rouges ».

$p(I) = \frac{C_3^3}{120} = \frac{1}{120}$.

J : « Les trois jetons ont la même couleur ».

C'est-à-dire tirer les 3 jetons rouges ou tirer 3 jetons parmi les 4 verts ou tirer les 3 jetons jaunes.

$p(J) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_3^3}{120} = \frac{1+4+1}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$.

K : « Les trois jetons sont de trois couleurs différentes ».

C'est-à-dire tirer 3 jetons l'un est rouge, l'autre vert et le troisième est jaune.

$p(K) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 \times C_3^1}{120} = \frac{3\times 4\times 3}{120} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0,3$.

2) L : « Deux jetons seulement ont la même couleur ».

Si on tire trois jetons de l'urne on aura l'un des cas suivant :

- Les trois jetons tirés sont de même couleur : l'évènement J
- Les trois jetons sont de trois couleurs différentes : l'évènement K
- Deux jetons seulement ont la même couleur : l'évènement L.

Les évènements J, K et L sont incompatibles. On a donc :

$L \cup J \cup K = \Omega$; $p(\Omega) = p(L\cup J\cup K) = p(L) + p(J) + p(K)$

Or $p(\Omega) = 1$, $p(J) = \frac{6}{120}$ et $p(K) = \frac{10}{120}$.

D'où $p(L) = 1 - p(J) - p(K) = 1 - \frac{6}{120} - \frac{10}{120} = \frac{120-16}{120} = \frac{104}{120} = \frac{13}{15}$.

3) E : « Les lettres inscrites sur les trois jetons tirés ne forment pas le mot BAC ».

Les lettres inscrites sur les trois jetons tirés ne forment pas le mot BAC, cela équivaut à dire que les trois jetons tirés ne sont pas de trois couleurs différentes.

Ainsi $p(E) = p(\overline{K}) = 1 - p(K) = 1 - 0,3 = 0,7$.

4) On répète l'épreuve trois fois de suite, en remettant à chaque fois les jetons tirés dans le sac.

F : « E est réalisé les trois fois ». $p(F) = 0,7\times 0,7\times 0,7 = 0,343$.

G : « E n'est réalisé qu'à la troisième fois ». $p(G) = 0,3\times 0,3\times 0,7 = 0,063$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$.

1)a) $f(0) = e^1 = e$; $f(1) = e^{1-\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $f(2) = e^{1-\frac{2}{2}} = e^0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-\frac{x}{2}} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1-\frac{x}{2}} = 0$.

2)a) $f(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$, pour tout $x \in IR$.

$f'(x) = \left(e^{1-\frac{x}{2}}\right)' = \left(1-\frac{x}{2}\right)' e^{1-\frac{x}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right) e^{1-\frac{x}{2}}$.

b) T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

$$T : y = f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-2)+1 = -\frac{1}{2}x+1+1 = -\frac{x}{2}+2.$$

3)a) En utilisant le graphique, on peut dresser le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0

b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq \sqrt{e}$.

$y = f(x)$ est l'équation de la courbe de f.

$y = \sqrt{e}$ est l'équation d'une droite Δ.

Utiliser le graphique pour résoudre cette inéquation, c'est déterminer graphiquement les abscisses des points de la courbe pour lesquelles la courbe est au-dessus de la droite Δ.

On peut voir directement que la courbe est au-dessus de la droite pour les réels x de l'intervalle $1, +\infty$. D'où l'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) \geq \sqrt{e}$ est $1, +\infty$.

c) $e^{1-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} = 2 \Leftrightarrow e^{1-\frac{x}{2}} = -\frac{x}{2}+2$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{x}{2}+2$$

D'autre part on a : $C : y = f(x)$ et $T : y = -\frac{x}{2}+2.$

Ainsi résoudre l'équation $e^{1-\frac{x}{2}} + \frac{x}{2} = 2$ est équivaut à déterminer l'intersection de la courbe C et sa tangente T.

On peut voir sur le graphique que le seul point d'intersection est le point de tangence, c'est-à-dire le point de coordonnées $2,1$.

Ainsi la seule solution de l'équation est 2.