

## Exercice 1

Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$1) a) U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 1 = \frac{1}{2} \times 4 + 1 = 3$$

$$U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 3 + 1 = \frac{5}{2}$$

$$b) U_1 - U_0 = 3 - 4 = -1$$

$$U_2 - U_1 = \frac{5}{2} - (-1) = \frac{7}{2}$$

On a  $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ , d'où  $(U_n)$  n'est pas une suite arithmétique.

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}.$$

On a  $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ , d'où  $(U_n)$  n'est pas une suite géométrique.

2) a) Montrons par récurrence que  $U_n > 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- $U_0 = 4 > 2$  d'où l'inégalité est vérifiée pour  $n = 0$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que l'inégalité est vraie pour  $n$ . C'est-à-dire  $U_n > 2$ .
- Montrons que l'inégalité est vraie pour  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } U_n > 2 &\Rightarrow \frac{1}{2}U_n > 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}U_n + 1 > 2 \\ &\Rightarrow U_{n+1} > 2 \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour  $n+1$ .

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence,  $U_n > 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$b) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + 1 - U_n = 1 - \frac{1}{2}U_n = \frac{1}{2}(2 - U_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$c) U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(2 - U_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n > 2$ , d'où  $U_{n+1} - U_n < 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Parsuite  $U_{n+1} < U_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi la suite  $(U_n)$  est décroissante.

d) On a  $U_n < 4$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . C'est-à-dire la suite  $(U_n)$  est majorée par 4.

La suite  $(U_n)$  est croissante et majorée, donc elle converge.

3)a) Soit  $(V_n)$  la suite définie par  $V_n = U_n - 2$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}U_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}U_n - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 2) = \frac{1}{2}V_n.$$

D'où  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

b)  $V_0 = U_0 - 2 = 4 - 2 = 2$ .

$(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $V_0 = 2$ .

On a  $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = \frac{1}{2^n} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \end{aligned}$$

## Exercice 2

Une urne contient 5 jetons : 3 noirs et 2 blancs.

On tire simultanément et au hasard deux jetons de l'urne.

1) Soit  $\Omega$  l'univers des cas possibles. On a  $\text{Card}(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ .

A : « Obtenir deux jetons noirs ».

C'est-à-dire tirer les deux jetons parmi les 3 noirs.

$$p(A) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}.$$

B : « Obtenir un seul jeton noir ».

C'est-à-dire tirer un jeton noir parmi les 3 noirs, et un jeton blanc parmi les deux blancs.

$$p(B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{10} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}.$$

C : « Obtenir deux jetons blancs ».

C'est-à-dire tirer les deux jetons blancs.

$$p(C) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}.$$

2) Soit  $X$  l'aléa numérique qui, à chaque tirage des deux jetons, associe le nombre de jetons noirs tirés.

a) Lors d'un tirage de deux jetons, on peut obtenir 1 jeton noir ou deux jetons noirs ou aucun jeton noir. D'où  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ .

$(X = 0)$ : « Aucun jeton noir est tiré », cela veut dire « obtenir deux jetons blancs »

$(X = 0)$  est l'évènement C.  $p(X = 0) = p(C) = \frac{1}{10}$ .

$(X = 1)$ : « Obtenir un jeton noir »

$(X = 1)$  est l'évènement B.  $p(X = 1) = p(B) = \frac{6}{10}$ .

$(X = 2)$ : « Obtenir deux jetons noirs »,  $p(X = 2) = p(A) = \frac{3}{10}$ .

On peut résumer la loi de probabilité de l'aléa X dans le tableau suivant :

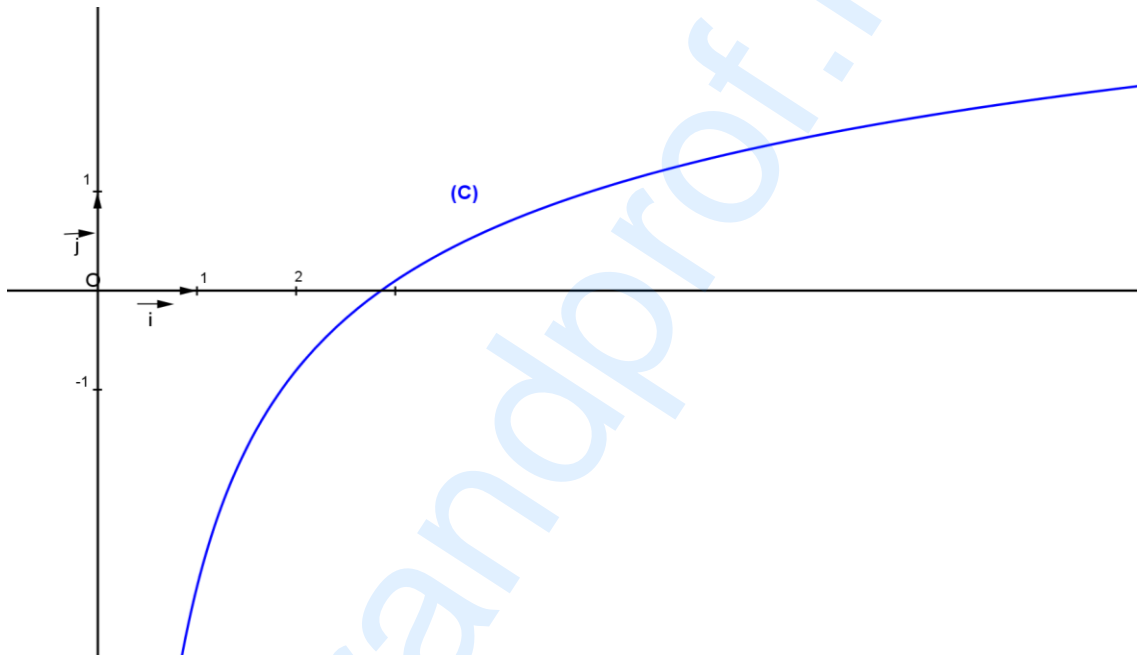
|       |                |                |                |
|-------|----------------|----------------|----------------|
| $x_i$ | 0              | 1              | 2              |
| $p_i$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |

b) L'espérance mathématique de X :  $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1,2$ .

### Exercice 3

Dans le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe (C) de la fonction f définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \text{Log}(x) - \frac{3}{x}$ .

- (C) admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction  $(O, \vec{i})$
- L'axe des ordonnées est une asymptote à (C).



1)a) La courbe (C) de f coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc l'équation  $f(x) = 0$  admet, dans  $]0, +\infty[$ , une unique solution  $\alpha$ .

b)  $f(2,8) = \text{Log}(2,8) - \frac{3}{2,8} \approx -0,042$  ;  $f(2,9) = \text{Log}(2,9) - \frac{3}{2,9} \approx 0,030$ . D'où  $2,8 < \alpha < 2,9$ .

$$2) f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{Log}(\alpha) - \frac{3}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Log}(\alpha) = \frac{3}{\alpha}$$

3) Soit F la fonction définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par  $F(x) = (x - 3)\text{Log}(x) - x$ .

a)  $F(3) = -3$ .

b) La fonction  $x \mapsto x - 3$ , la fonction  $x \mapsto \text{Log}(x)$  et la fonction  $x \mapsto x$  sont dérivables sur  $]0, +\infty[$ , d'où la fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} F'(x) &= (x-3)' \text{Log}(x) + (x-3)(\text{Log}(x))' - 1 \\ &= \text{Log}(x) + (x-3) \frac{1}{x} - 1 = \text{Log}(x) + 1 - \frac{3}{x} - 1 = \text{Log}(x) - \frac{3}{x} = f(x). \end{aligned}$$

La fonction  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $F'(x) = f(x)$ , pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ , d'où  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

4) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \alpha$  et  $x = 3$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\alpha}^3 f(x) dx = [F(x)]_{\alpha}^3 = F(3) - F(\alpha) = -3 - ((\alpha-3)\text{Log}(\alpha) - \alpha) \\ &= -3 - \left( (\alpha-3) \frac{3}{\alpha} - \alpha \right) = -3 - \left( 3 - \frac{9}{\alpha} - \alpha \right) = -6 + \frac{9}{\alpha} + \alpha = \frac{\alpha^2 - 6\alpha + 9}{\alpha} = \frac{(\alpha-3)^2}{\alpha} \text{ unité d'aire.} \end{aligned}$$

#### Exercice 4

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x-2}$ . ( $\zeta$ ) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1)a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-2} = 0$ , car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , d'où l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe ( $\zeta$ ) au voisinage de  $(-\infty)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-2} = +\infty$ , car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2} \frac{e^x}{x} = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ , d'où la courbe ( $\zeta$ ) admet une branche parabolique de direction l'axe  $(O, \vec{j})$  au voisinage de  $+\infty$ .

2)a)  $f(x) = e^{x-2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$f'(x) = (x-2)' e^{x-2} = e^{x-2} > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

b) Le tableau de variation de  $f$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f$     | 0         | $+\infty$ |

3) Soit  $(T)$  la tangente à la courbe ( $\zeta$ ) au point d'abscisse 2.

$$(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$(T) : y = e^0(x-2) + e^0 = x-2+1 = x-1. \text{ D'où } (T) : y = x-1.$$

4) La courbe ( $\zeta$ ) de f.

