Examen du baccalauréat **Session contrôle**

Session de Juin 2016

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

k un nombre réel.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + k, \text{ pour tout } n \in IN. \end{cases}$

I] Dans cette partie, on prend $k = \frac{2}{5}$.

1) $u_1 = \frac{3}{5}u_0 + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\times 1 + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$; $u_2 = \frac{3}{5}u_1 + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\times 1 + \frac{2}{5} = 1.$

2) Montrons que $u_n = 1$, pour tout $n \in IN$. Raisonnons par récurrence :

- On a $u_0 = 1$, d'où l'égalité est vérifiée pour $n = 1$.
- Soit $n \in IN$, supposons que l'égalité est vraie pour n, c'est-à-dire $u_n = 1$.
- Montrons que l'égalité est vraie pour $n+1$.
  On a $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\times 1 + \frac{2}{5} = 1.$
  D'où $u_{n+1} = 1.$

Ainsi d'après le principe de récurrence, $u_n = 1$, pour tout $n \in IN$.

II] Dans la suite de l'exercice, on prend $k = -\frac{3}{5}$.

1)a) $u_1 = \frac{3}{5}u_0 - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\times 1 - \frac{3}{5} = 0$; $u_2 = \frac{3}{5}u_1 - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}\times 0 - \frac{3}{5} = -\frac{3}{5}.$

b) Si (u_n) est une suite géométrique alors son rapport q va vérifier :

$u_1 = q\times u_0 \Rightarrow 0 = q$ et $u_2 = q\times u_1 \Rightarrow -\frac{3}{5} = 0$ ce qui est absurde.

D'où (u_n) n'est pas une suite géométrique.

2) (v_n) la suite définie sur IN par $v_n = 2u_n + 3$.

a) $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 3 = 2\left(\frac{3}{5}u_n - \frac{3}{5}\right) + 3 = \frac{6}{5}u_n - \frac{6}{5} + 3 = \frac{6}{5}u_n + \frac{9}{5} = \frac{3}{5}(2u_n + 3) = \frac{3}{5}v_n$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $v_0 = 2u_0 + 3 = 5.$

b) $v_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times v_0 = 5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n$; pour tout $n \in IN$.

c) $v_n = 2\,u_n + 3 \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}(v_n - 3)$

$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{2}\left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3\right) = -\frac{3}{2}$; car $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$.

3)a) $u_n - u_{n+1} = u_n - \frac{3}{5}\,u_n + \frac{3}{5} = \frac{2}{5}\,u_n + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}(2\,u_n + 3) = \frac{1}{5}v_n$

b) $u_n - u_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$; pour tout $n \in IN$

La suite (v_n) est positive puisque son premier terme et sa raison sont positifs.

D'où $u_n - u_{n+1} \geq 0$; pour tout $n \in IN$. C'est-à-dire $u_n \geq u_{n+1}$; pour tout $n \in IN$.

Ainsi la suite est décroissante.

c) On a $u_n = \frac{1}{2}\left(5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 3\right) = \frac{5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{2} \geq -\frac{3}{2}$; pour tout $n \in IN$.

4) $S_{671} = v_0 + v_1 + ... + v_{671}$ et $T_{671} = u_0 + u_1 + ... + u_{671}$

$S_{671} - 2\,T_{671} = (v_0 + v_1 + ... + v_{671}) - 2(u_0 + u_1 + ... + u_{671})$

$= (v_0 - 2\,u_0) + (v_1 - 2\,u_1) + ... + (v_{671} - 2\,u_{671})$; or $v_n - 2\,u_n = 3$

$= \underbrace{3 + 3 + ... + 3}_{672 \text{ fois}} = 3 \times 672 = 2016.$

Exercice 2

En notant boxe BX, karaté K, judo J et natation N, on peut résumer les données comme suit :

10 élèves: $\begin{cases} 4\,\text{Filles} : 1BX,\ 1K,\ 2N \\ 6\,\text{Garçons} : 3BX,\ 2J,\ 1N \end{cases}$

1) On choisit au hasard 2 élèves parmi les 10 médaillés. $\text{Card}\,\Omega = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$

A : « Les deux élèves choisis pratiquent la natation ». $p(A) = \frac{C_3^2}{45} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$.

B : « Parmi les deux élèves choisis, un seul pratique le judo ». $p(B) = \frac{C_2^1 \times C_8^1}{45} = \frac{2 \times 8}{45} = \frac{16}{45}$.

2) Une association choisit au hasard 3 élèves parmi les 10 médaillés.

$\text{Card}\,\Omega = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 120.$

a) E : « Les trois champions choisis sont de même sexe ».

$$p(E)=\frac{C_4^3+C_6^3}{120}=\frac{4+20}{120}=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}.$$

F : « Les trois champions choisis pratiquent la même activité sportive ». Donc ils pratiquent la boxe ou la natation. $p(F)=\frac{C_4^3+C_3^3}{120}=\frac{4+1}{120}=\frac{5}{120}=\frac{1}{24}$.

G : « au moins un champion parmi les trois choisis pratique le judo ».

$$p(G)=\frac{C_2^1\times C_8^2+C_2^2\times C_8^1}{120}=\frac{2\times 28+1\times 8}{120}=\frac{64}{120}=\frac{8}{15}.$$

b) $E\cap F$: « Les trois champions choisis sont de même sexe et pratiquent la même activité sportive ». C'est-à-dire ce sont les 3 garçons qui pratiquent la boxe. $p(E\cap F)=\frac{1}{120}$.

$$p(E\cup F)=p(E)+p(F)-p(E\cap F)=\frac{1}{5}+\frac{1}{24}-\frac{1}{120}=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}.$$

c) X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de médaillés en boxe.

$X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$

$(X=0)$: « Aucun médaillé en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X=0)=\frac{C_6^3}{120}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}.$$

$(X=1)$: « Un seul médaillé en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X=1)=\frac{C_4^1\times C_6^2}{120}=\frac{4\times 15}{120}=\frac{1}{2}.$$

$(X=2)$: « Deux médaillés en boxe parmi les trois champions récompensés ».

$$p(X=2)=\frac{C_4^2\times C_6^1}{120}=\frac{6\times 6}{120}=\frac{3}{10}.$$

$(X=3)$: « Les trois champions récompensés sont médaillés en boxe».

$$p(X=3)=\frac{C_4^3}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}.$$

On peut résumer la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	0	1	2	3
$p_i=p(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{12}{10}=1{,}2.$$

Exercice 3

1) Par lecture graphique :

a) $f(0)=\frac{1}{e}$; $f(1)=1$; $f(1+\ln 2)=2$ et $f'(1)=1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c) L'ensemble des réels x tels que $\frac{1}{e}\le f(x)<2$ est $[0,\ 1+\ln 2[$.

2)a) $f(x)=e^{\alpha x+\beta}$; α et β deux réels.

$$\begin{cases} f(0)=\frac{1}{e} \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\beta}=\frac{1}{e} \\ e^{\alpha+\beta}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=\ln\frac{1}{e}=-1 \\ \alpha-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

$f(x)=e^{x-1}$; pour tout réel x.

b) $f(x)=e^{x-1}$; pour tout réel x.

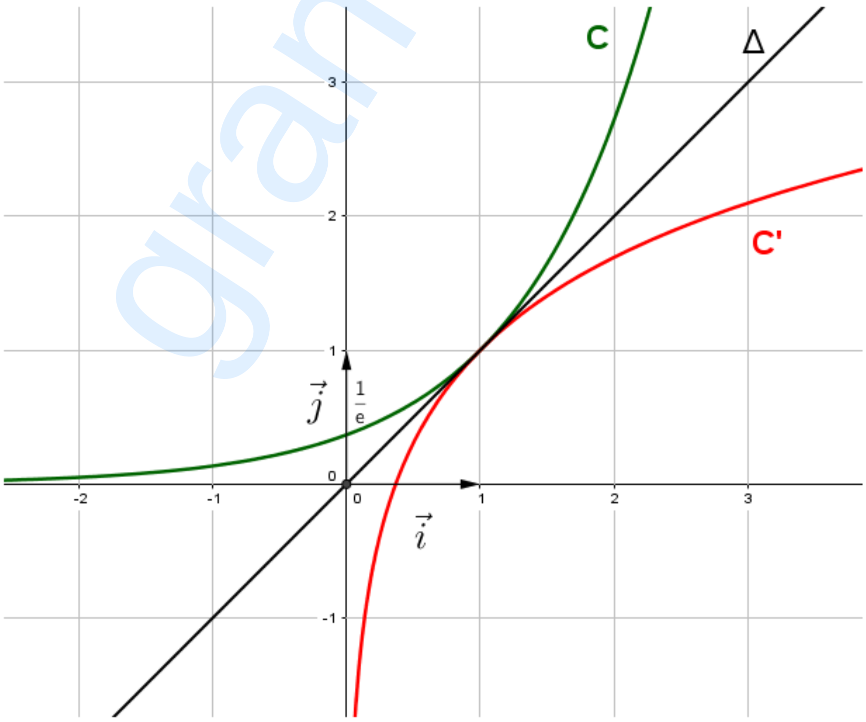
$f'(x)=(x-1)'e^{x-1}=e^{x-1}$; pour tout réel x.

3)a) $f'(x)=e^{x-1}>0$; pour tout réel x. D'où f est strictement croissante sur IR.

F est continue et strictement croissante sur IR, d'où elle réalise une bijection de IR sur $f(IR)=]0,\ +\infty[$.

b) On a $f(0)=\frac{1}{e}\Leftrightarrow f^{-1}(\frac{1}{e})=0$; $f(1)=1\Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$; $f(1+\ln 2)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(2)=1+\ln 2$.

c) La courbe C' de f^{-1} :



4)a) On note A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, la tangente Δ et la droite d'équation $x=0$.

$$A=\int_0^1 (f(x)-x)\,dx=\int_0^1 \left(e^{x-1}-x\right)dx=\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{e}=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}.$$

b) On note A' l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C' et les droites d'équations $x=1$ et $y=0$.

On peut remarquer, par raison de symétrie par rapport à Δ, que $A+A'$ est l'aire du triangle limité par Δ et les droites d'équations $x=1$ et $y=0$. L'aire de ce triangle est la moitié de l'aire du carré, donc l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}$ u.a.

On a $A+A'=\frac{1}{2}\Leftrightarrow A'=\frac{1}{2}-A$

$$\Leftrightarrow A'=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\text{ u.a}$$