Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

Section : Sport

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2016 \\ u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $u_1 = \frac{1}{e}(u_0 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}(2016 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e} + 2015$

$u_2 = \frac{1}{e}(u_1 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e}(\frac{1}{e} + 2015 - 2015) + 2015 = \frac{1}{e^2} + 2015$

b) $(u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) = \left((\frac{1}{e^2} + 2015) - (\frac{1}{e} + 2015)\right) - \left((\frac{1}{e} + 2015) - 2016\right)$

$= \left(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} - 1\right)$

$= \frac{1}{e^2} - 2 \times \frac{1}{e} + 1 = \left(\frac{1}{e} - 1\right)^2.$

c) On a $(u_2 - u_1) - (u_1 - u_0) \neq 0$, c'est à dire $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$, d'où (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

2)a) On a : $u_{n+1} = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 - u_n$

$= \frac{1}{e}u_n - u_n - \frac{1}{e} \times 2015 + 2015$

$= (\frac{1}{e} - 1)u_n - (\frac{1}{e} - 1) \times 2015$

$= (\frac{1}{e} - 1)(u_n - 2015)$

b) Montrons par récurrence que $u_n > 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 2016 > 2015$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $u_n > 2015$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n + 1$.

On a $u_n > 2015 \Rightarrow u_n - 2015 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e}(u_n - 2015) + 2015 > 2015$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 2015$$

D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a: $u_{n+1} - u_n = (\frac{1}{e} - 1)(u_n - 2015)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or $\frac{1}{e} - 1 < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2015$, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Parsuite $u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

3)a) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2015 = \frac{1}{e}(u_n - 2015) = \frac{1}{e} v_n.$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme v_0

$v_0 = u_0 - 2015 = 2016 - 2015 = 1.$

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme $V_0 = 1$.

On a $v_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n v_0 = \frac{1}{e^n} \times 1 = \frac{1}{e^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $v_n = u_n - 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow u_n = v_n + 2015$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{e^n} + 2015 = e^{-n} + 2015.$$

d) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} + 2015 = 2015$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$.

4) $u_n < 2015 + \frac{1}{2016} \Leftrightarrow e^{-n} + 2015 < 2015 + \frac{1}{2016}$

$$\Leftrightarrow e^{-n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^n} < \frac{1}{2016}$$

$$\Leftrightarrow e^n > 2016$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^n) > \ln(2016)$$

$$\Leftrightarrow n > \ln(2016)$$

$\ln(2016) \simeq 7{,}60$ d'où $n_0 = 8$.

Exercice 2

Une urne contient 5 boules numérotées : 1, 1, 2, 2, 3.
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

1) Soit Ω l'univers des cas possibles. On a $Card(\Omega) = C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10.$

A : « Les deux boules tirées portent le même numéro».
C'est-à-dire tirer les deux boules qui portent le numéro 1 ou les deux boules qui portent le numéro 2.

$p(A) = \frac{C_2^2 + C_2^2}{10} = \frac{1+1}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

B : «Parmi les boules tirées, une seule porte le numéro 1».
C'est-à-dire tirer une boule parmi les 2 portant le numéro 1, et une boule parmi les autres (qui portent le numéro 2 ou 3).

$p(B) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{2\times 3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$

C : «Les deux boules tirées portent le même numéro ou une seule d'entre elles porte le numéro 1 ».

On peut remarquer que $C = A \cup B$. D'où $p(C) = p(A\cup B) = p(A) + p(B)$ puisque A et B sont deux évènements incompatibles.

$p(C) = p(A\cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$

2) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe le nombre de boules portant un numéro impair tirées.

a) Lors d'un tirage de deux boules, on peut obtenir 1 boule portant un numéro impair ou deux ou aucune. D'où $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$(X = 0)$: « Aucune boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer deux boules portant le numéro 2 ». $p(X=0) = \frac{1}{10}.$

$(X = 1)$: « Une seule boule portant un numéro impair est tirée », cela veut dire « tirer une boule portant un numéro impair et l'autre portant le numéro 2 ». $p(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{6}{10}.$

$(X = 2)$: « Deux boules portant des numéros impairs sont tirées».

$p(X=2) = \frac{C_3^2}{10} = \frac{3}{10}.$

On peut résumer la loi de probabilité de la variable aléatoire X dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

b) Soit p la probabilité d'avoir au moins une boule portant un numéro impair.

On a $p = p(X\geq 1) = p(X=1) + p(X=2) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10} = 0,9.$

c) L'espérance mathématique de X : $E(X) = 0\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{6}{10} + 2\times\frac{3}{10} = \frac{12}{10} = 1,2.$

Exercice 3

$f(x)=e^{x-\ln 2}$; $x\in IR$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\ \vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-\ln 2}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}e^{-\ln 2}=0$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\ln 2}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}e^{-\ln 2}=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

b) $f(x)=e^{x-\ln 2}$; $x\in IR$.

$f'(x)=(x-\ln 2)'\,e^{x-\ln 2}=e^{x-\ln 2}$; $x\in IR$.

c) On a $f'(x)=e^{x-\ln 2}>0$; pour tout $x\in IR$. Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

d) T la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

$T: y=f'(0)x+f(0)=e^{-\ln 2}x+e^{-\ln 2}=\dfrac{1}{2}(x+1)$.

$T: y=\dfrac{1}{2}(x+1)$.

2)a) $f(\ln 2)=e^{\ln 2-\ln 2}=e^{0}=1$, d'où le point $A(\ln 2, 1)\in(C)$.

$f(2\ln 2)=e^{2\ln 2-\ln 2}=e^{\ln 2}=2$, d'où le point $B(2\ln 2,\ 2)\in(C)$.

b) Soit D la droite d'équation $y=\dfrac{1}{\ln 2}x$.

Pour $x=\ln 2$; $y=\dfrac{1}{\ln 2}\ln 2=1$; d'où le point $A(\ln 2, 1)\in D$.

Pour $x=2\ln 2$; $y=\dfrac{1}{\ln 2}\times 2\ln 2=2$; d'où le point $B(2\ln 2,\ 2)\in D$.

Les points A et B appartiennent à la droite D, d'où $D=(AB)$.

Ainsi une équation de la droite (AB) est $y=\dfrac{1}{\ln 2}x$.

c) Voir l'annexe.

3)a) On peut remarquer d'après le graphique que la droite (AB) est au-dessus de la courbe (C) dans l'intervalle $\ln 2, 2\ln 2$. D'où $\dfrac{1}{\ln 2}x\geq f(x)$, pour tout $x\in \ln 2, 2\ln 2$

$$\frac{1}{\ln 2}x\geq f(x),\ \text{pour tout } x\in \ln 2, 2\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2}x\geq e^{x-\ln 2},\ \text{pour tout } x\in \ln 2, 2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln 2}x-e^{x-\ln 2}\geq 0,\ \text{pour tout } x\in \ln 2, 2\ln 2$$

b) $F(x)=\dfrac{1}{2\ln 2}x^{2}-e^{x-\ln 2}$; $x\in IR$.

$F'(x)=\left(\dfrac{1}{2\ln 2}x^{2}-e^{x-\ln 2}\right)'=\dfrac{1}{\ln 2}x-e^{x-\ln 2}$; $x\in IR$.

On a $\dfrac{1}{\ln 2}x-e^{x-\ln 2}\geq 0$, pour tout $x\in \ln 2, 2\ln 2$, d'où $F'(x)\geq 0$, pour tout $x\in \ln 2, 2\ln 2$.

Par suite F est croissante sur $\ln 2, 2\ln 2$.

4) Soit S l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), les droites d'équations $x = \ln 2,\ x = 2\ln 2$ et la droite (AB).

$$S = \int_{\ln 2}^{2\ln 2}\left(\frac{1}{\ln 2}x - e^{x-\ln 2}\right)dx = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} F'(x)\,dx$$

$$= F(x)_{\ln 2}^{2\ln 2} = F(2\ln 2) - F(\ln 2)$$

$$= \left(\frac{1}{2\ln 2}(2\ln 2)^2 - e^{2\ln 2 - \ln 2}\right) - \left(\frac{1}{2\ln 2}(\ln 2)^2 - e^{\ln 2 - \ln 2}\right)$$

$$= (2\ln 2) - e^{\ln 2} - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - 1\right)$$

$$= 2\ln 2 - 2 - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - 1\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - 1\,\text{u.a}$$

L'annexe :