Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
Faux	vrai	vrai	vrai

1) On peut remarquer que la deuxième ligne de la matrice B est nulle, donc B est non inversible. Par conséquent B ne peut pas être l'inverse de A.

2) $M=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$; $\text{dét}\, M=(-1)\times\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}=6.$

$\text{dét}\, M\neq 0,$ d'où la matrice M est inversible.

3) $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0,$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1.$

4) $v_n=f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1,$ car $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1.$ D'où v est convergente.

Exercice 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2e^x$. ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0,$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-2e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty,$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-2\right)=+\infty,$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty.$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty,$ d'où la courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

b) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=e^{2x}-2e^x$; $x\in\mathbb{R}.$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$; $x\in\mathbb{R}.$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{x}(e^{x}-1)=0$

$\Leftrightarrow e^{x}-1=0$; car $e^{x}>0$

$\Leftrightarrow e^{x}=1 \Leftrightarrow x=0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2)a) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^{x}=0$

$\Leftrightarrow e^{x}(e^{x}-2)=0$

$\Leftrightarrow e^{x}-2=0$

$\Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\ln 2.$

Ainsi l'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et l'axe $(O,\vec{i})$ est le point de coordonnées $(\ln 2,\ 0)$.

b) Voir figure.

3)a) Soit a un réel strictement négatif.

$\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe($\mathscr{C}$), les axes du repère et la droite d'équation $x=a$.

$$\mathcal{A}=\int_a^0 -f(x)\,dx=-\int_a^0 (e^{2x}-2e^{x})\,dx=-\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{x}\right]_a^0=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2a}-2e^{a}\ \text{unité d'aire.}$$

b) $\lim\limits_{a\to-\infty}\mathcal{A}=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2a}-2e^{a}=\frac{3}{2}.$

4) Soit g la restriction de f à $[0,+\infty[$.

a) On a g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, d'où g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur g($[0,+\infty[$)=$[-1,+\infty[$.

b) Voir figure.

c) Soit $x\in\mathbb{R}$, $\left(e^{x}-1\right)^{2}-1=e^{2x}-2e^{x}+1-1=e^{2x}-2e^{x}=f(x)$. D'où $f(x)=\left(e^{x}-1\right)^{2}-1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Soient $x\in[0,+\infty[$ et $y\in[-1,+\infty[$.

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\left(e^{x}-1\right)^{2}-1$

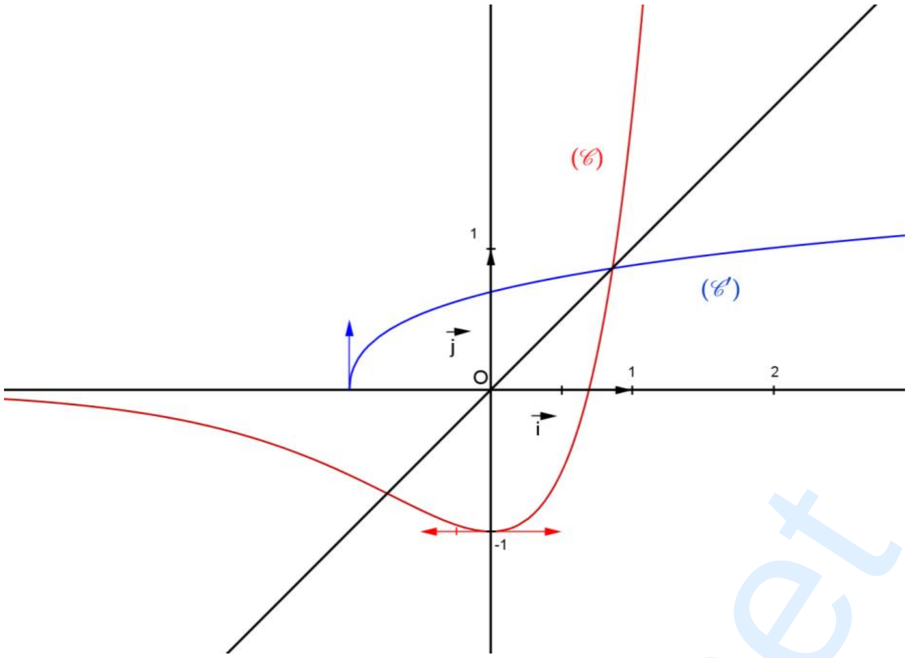
$\Leftrightarrow y+1=\left(e^{x}-1\right)^{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=e^{x}-1$; on a $y+1\geq 0$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow e^{x}=1+\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x=\ln\left(1+\sqrt{y+1}\right).$

Ainsi $g^{-1}(x)=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$; pour tout $x\in[-1,+\infty[$.



Exercice 3

Soit n un entier naturel, on considère les entiers $p = n+5$ et $q = 2n+3$ et on note $d = \text{PGCD}(p,q)$.

1)a) $2p - q = 2(n+5) - (2n+3) = 7$.

On a d divise p et q, donc d divise $2p-q$, par conséquent d divise 7. Ainsi $d = 1$ ou $d = 7$.

b) Supposons que p est un multiple de 7. Il existe alors un entier k tel que $p = 7k$.

$$\begin{aligned} 2p - q = 7 &\Leftrightarrow 2\times 7k - q = 7 \\ &\Leftrightarrow q = 2\times 7k - 7 \\ &\Leftrightarrow q = 7\times(2k-1) \end{aligned}$$

D'où q est un multiple de 7.

c) Montrons que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

« $\Rightarrow$ »

Supposons que p est un multiple de 7. On a $p = 7k$; avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} p = n+5 &\Rightarrow n = p-5 \\ &\Rightarrow n = 7k-5 \\ &\Rightarrow n \equiv -5[7] \\ &\Rightarrow n \equiv 2[7]. \end{aligned}$$

D'où si p est un multiple de 7 alors $n \equiv 2[7]$.

« $\Leftarrow$ »

Supposons que $n \equiv 2[7]$.

$n \equiv 2[7] \Rightarrow$ il existe un entier m tel que $n = 7m+2$.

D'autre part $p = n+5 = 7m+2+5 = 7(m+1)$. D'où p est un multiple de 7.

Ainsi p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

2) Montrons que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

« $\Rightarrow$ »

Supposons que $d = 7$.

$d = 7$, donc p est un multiple de 7 et d'après 1)c) on peut conclure que $n \equiv 2[7]$.

« $\Leftarrow$ »

Supposons que $n \equiv 2[7]$.

D'après 1)c), on peut conclure que p est un multiple de 7, et d'après 1)b) on déduit que q est aussi un multiple de 7. On a 7 divise p et q, donc 7 divise leur PGCD d. Or on sait que $d = 1$ ou $d = 7$, d'où $d = 7$.

3)a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.

$$\text{On a } 6 \equiv (-1)[7] \Rightarrow 6^{2014} \equiv (-1)^{2014}[7]$$
$$\Rightarrow 6^{2014} \equiv 1[7]$$
$$7 \equiv 0[7] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 0[7]$$
$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 7^{2015} \equiv 1[7].$$

Par conséquent $d \neq 7$, donc $d = 1$.

b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

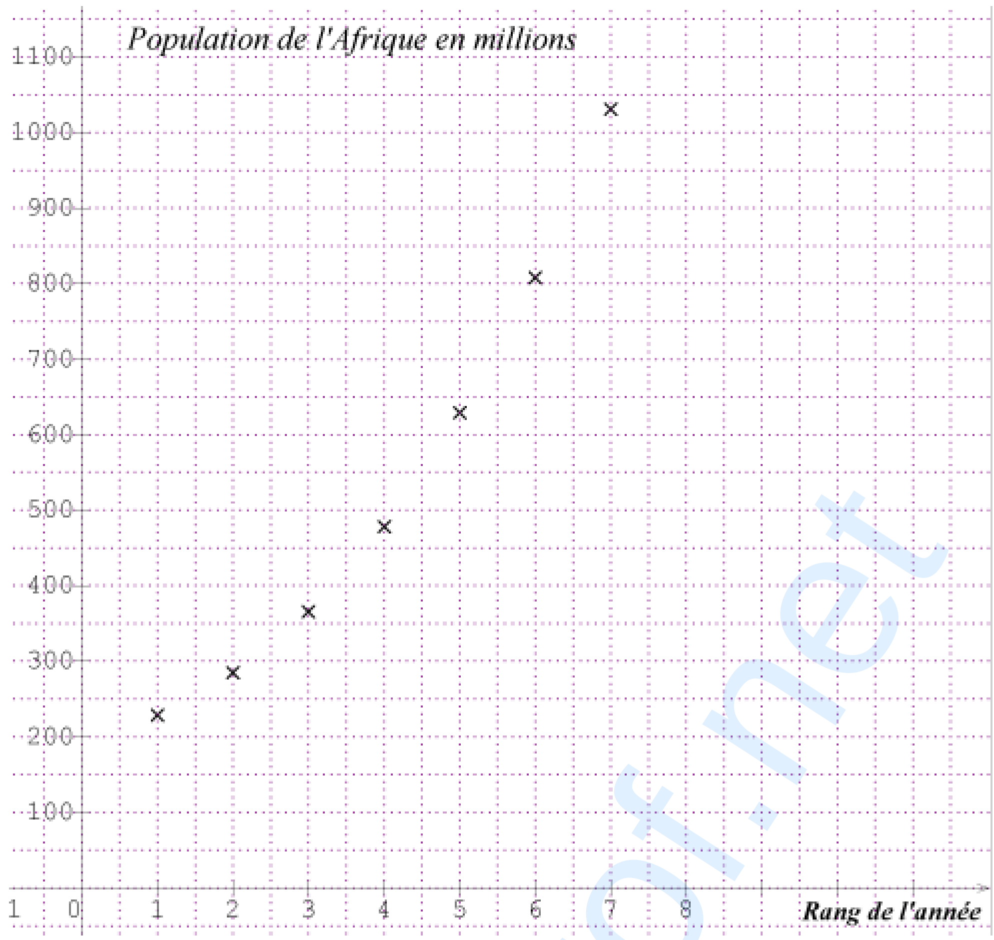
$$\text{On a } 6^{2014} \equiv 1[7]$$
$$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^{2015} \equiv 1[7]$$
$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 8^{2015} \equiv 2[7]. \text{ Par conséquent } d = 7.$$

Exercice 4

Le tableau suivant donne, en millions, l'évolution de la population d'Afrique depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i	229	285	366	478	630	808	1031

1) Le nuage des points (x_i, y_i).



2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (X, Y), pour cela on note $Z = \ln(Y)$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	229	285	366	478	630	808	1031
$z_i=\ln y_i$	5,43	5,65	5,90	6,17	6,45	6,69	6,94

a) $r \simeq 0{,}9996$.

b) Une équation de la droite de régression de z en x est : $z = 0{,}26\ x + 5{,}15$.

3)a) $z = 0{,}26\ x + 5{,}15 \Leftrightarrow \ln y = 0{,}26\ x + 5{,}15$

$\Leftrightarrow y = e^{0{,}26\ x + 5{,}15}$

$\Leftrightarrow y = e^{5{,}15} e^{0{,}26\ x} = 172{,}43 e^{0{,}26\ x}$.

b) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.

2030 est de rang 9. Donc la population de l'Afrique en 2030 est estimée à :

$172{,}43 e^{0{,}26 \times 9} \simeq 1790$ millions.