Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	a	b	b	b

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1) = 0.$

2) On a : $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow U_n > U_{n+1}$$

3) $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A}).p(\overline{B}/\overline{A}) = 0,8\times0,6 = 0,48.$

4) $p(B) = p(A).p(B/A) + p(\overline{A}).p(B/\overline{A}) = 0,2\times0,3+0,8\times0,4 = 0,38.$

Exercice 2

1) $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \in IR.$

a) $\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = -1-\alpha^3.$

b) M_α est inversible $\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -1-\alpha^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+1 \neq 0$$

$\alpha^3+1=0,\ \alpha\in IR \Leftrightarrow \alpha^3 = -1$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1$$

Ainsi M_α est inversible si et seulement si $\alpha \in IR - \;\; -1$.

2)a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_2$ $(\alpha = 2)$; d'où la matrice A est inversible.

b) $A\times B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&4&1\\4&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9I_3$

c) $A\times B=9\,I_3 \;\Leftrightarrow\; A\times\left(\frac{1}{9}B\right)=I_3$

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{9}A\right)\times B=I_3.$

D'où $A^{-1}=\frac{1}{9}B$ et $B^{-1}=\frac{1}{9}A.$

3)a) $(S):\begin{cases}x-2y+4z=3\\-2x+4y+z=3\\4x+y-2z=6\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&4&1\\4&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\Leftrightarrow B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

b) $(S)\Leftrightarrow\; B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\;\frac{1}{9}A\times B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}A\times\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\; I_3\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\times\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow\;\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\times\begin{pmatrix}15\\12\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}\\y=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\\z=1\end{cases}$

Exercice 3

A) $f(x)=e^x-1;\; x\in IR.$

1) $f(x)=e^x-1;\; x\in IR.\; f'(x)=e^x\;;\; x\in IR.$

Δ la tangente à (C) au point O.

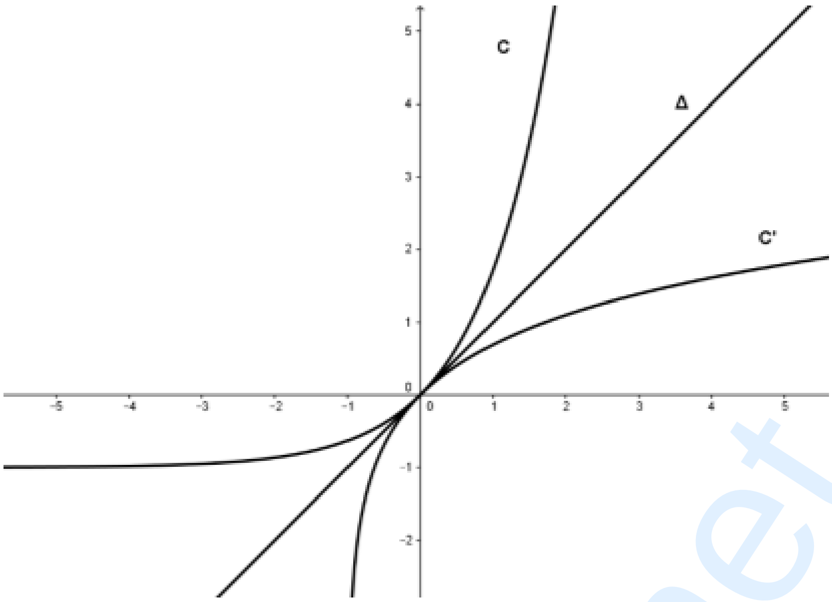
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=-1$, car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-1=+\infty.$

$f'(x)=e^x>0$; pour tout $x\in IR$, d'où f est strictement croissante sur IR.

f est continue et strictement croissante sur IR, d'où f réalise une bijection de IR sur $f(IR)=\;-1,+\infty$. $I=\;-1,+\infty$.

3) La courbe C' de f^{-1}.



4) Soit Soit $x \in IR$ et $y \in -1, +\infty$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^x - 1$$
$$\Leftrightarrow e^x = y + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y+1).$$

D'où $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$, $x \in -1, +\infty$.

B) $g(x) = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$; $x \in IR$.

1)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

D'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (Γ) de g au voisinage de (-∞).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1} = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(e^x+1)} = +\infty.$$

D'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de (+∞).

2)a) $f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{e^x + 1} < 0$; pour tout $x \in IR$.

D'où la courbe (Γ) est au-dessus de la courbe (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{e^x + 1} = 0$.

3)a) $g(x) = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$; $x \in IR$.

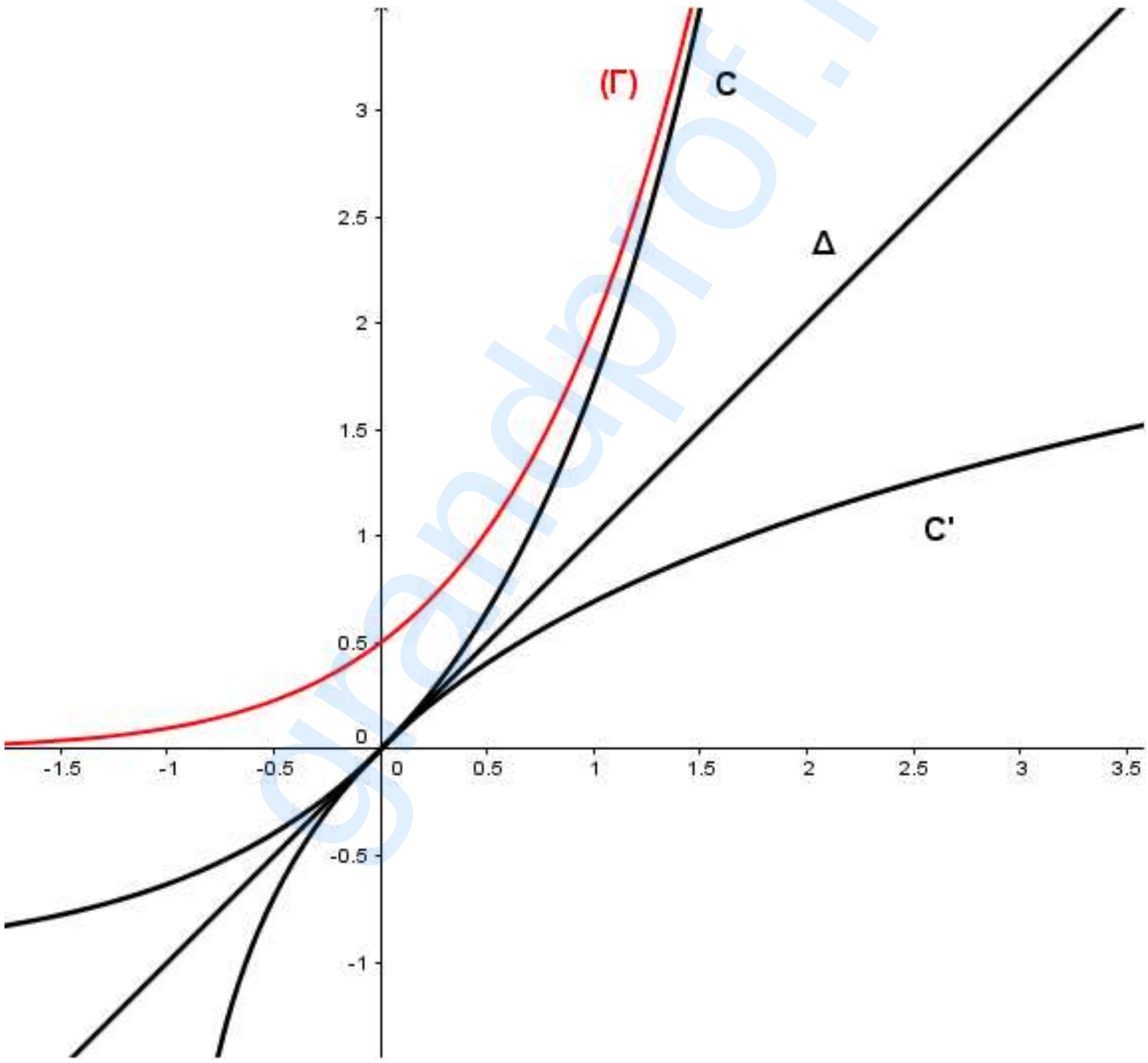
$$g'(x)=\left(e^x-1+\frac{1}{e^x+1}\right)'=e^x-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(e^{2x}+2e^x+1)-e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^{2x}+2e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$$

D'où $g'(x)=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$; pour tout $x\in IR$.

b) On a $g'(x)=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}>0$; pour tout $x\in IR$.

x	$-\infty$	$+\infty$
g'(x)	+	
g	0 ↗	$+\infty$

c) $g(0)=\frac{1}{2}$.



4)a) $e^x-\frac{e^x}{e^x+1}=e^x-\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=g(x)$

D'où $g(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$; pour tout $x\in IR$.

b) Soit A l’aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), l’axe des abscisses et les droites d’équations $x=0$ et $x=1$.

$$A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[e^x-\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$= e-\ln(e+1)\ -\ 1-\ln 2\ =e-1+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\ \text{u.a.}$$

Exercice 4

1) $(E): 11x-7y=4.$

a) $(E): 11\times1-7\times1=4,$ d'où le couple $(1,1)$ est une solution de (E).

b) $(E): 11x-7y=4=11\times1-7\times1 \Leftrightarrow 11(x-1)-7(y-1)=0$

$$\Leftrightarrow 11(x-1)=7(y-1)$$

$$\left.\begin{array}{r}11/7(y-1)\\ 11\wedge7=1\end{array}\right\}\Rightarrow 11/y-1$$

$$\Rightarrow y-1=11k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y=11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}11x-7y=4 &\Rightarrow 11x-7(11k+1)=4\\ &\Rightarrow 11x=7(11k+1)+4\\ &\Rightarrow 11x=7\times11k+11\\ &\Rightarrow x=7k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

D’où $S=\ \ 7k+1,11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

2)a) $90=8\times11+2\equiv2\ \ 11\ ;\ 90=12\times7+6\equiv6\ \ 7$ d'où $90\in G.$

b) Soit $n\in G$ et (p,q) le couple d’entiers relatifs vérifiant $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$.

$$\begin{aligned}n=11p+2=7q+6 &\Rightarrow 11p+2=7q+6\\ &\Rightarrow 11p-7q=4\\ &\Rightarrow (p,q) \text{ est une solution de (E).}\end{aligned}$$

c) D’après b) on a montré que si n est un élément de G, alors $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$ et (p,q) est une solution de (E).

On obtient donc $\begin{cases}n=11p+2\\ n=7q+6\end{cases}$ et $(p,q)=\ \ 7k+1,11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}.$

$n=11p+2=11(7k+1)+2=77k+13.$

$n=77k+13\ \Rightarrow n\equiv13\ \ 77\ .$

Ainsi si n est un élément de G, alors $n\equiv13\ \ 77\ .$

3) Soit n un entier relatif tel que $n\equiv13\ \ 77\ .$

$$n \equiv 13 \quad 77 \;\Rightarrow n = 77k + 13 \;;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n = 11(7k+1) + 2 \;;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \equiv 2 \quad 11$$

$$n \equiv 13 \quad 77 \;\Rightarrow n = 77k + 13 \;;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n = 7(11k+1) + 6 \;;\; k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow n \equiv 6 \quad 7$$

$n \equiv 2 \quad 11$ et $n \equiv 6 \quad 7$, d'où $n \in G$.

4) D’après ce qui précède un entier relatif n est un élément de G si et seulement si $n \equiv 13 \quad 77$.

Le plus petit élément de G supérieur à 2000, est le plus petit entier supérieur à 2000 et dont le reste de la division euclidienne par 77 est 13. Il suffit de voir les multiples de 77 supérieurs à 2000.

On a : $77 \times 25 = 1925$ et $77 \times 26 = 2002$.

D'où $77 \times 26 + 13 = 2015$ est le plus petit élément de G supérieur à 2000.