

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)Session principale 2017Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

\* Résolution d'équations du second degré dans IC

\* Complexe et géométrie

1) Soit l'équation (E) :  $z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$  avec  $z \in \mathbb{C}$ .

a)  $(1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = -3 + 4i$

b) On pose  $a = 1$ ,  $b' = -(1+i)$  et  $c = 3 - 2i$

$$\Delta = (-(1+i))^2 - (3-2i) = 2i - 3 + 2i = -3 + 4i = (1+2i)^2$$

d'où 
$$\begin{cases} z_1 = \frac{1+i-(1+2i)}{1} = -i \\ z_2 = \frac{1+i+(1+2i)}{1} = 2 + 3i \end{cases}$$

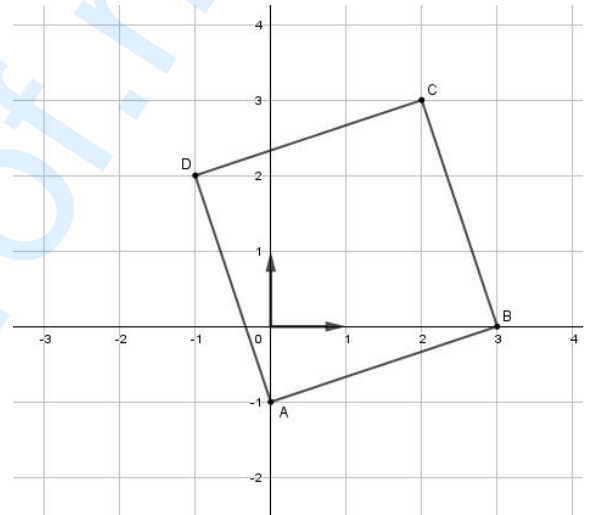
Par suite  $S_{\mathbb{C}} = \{-i, 2 + 3i\}$

2) a)  $z_A = -i \Rightarrow A(0, -1)$

$z_B = 3 \Rightarrow B(3, 0)$

$z_C = 2 + 3i \Rightarrow C(2, 3)$

$z_D = -1 + 2i \Rightarrow D(-1, 2)$



b)  $|z_C - z_A| = |2 + 3i + i| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_D - z_B| = |-1 + 2i - 3| = |-4 + 2i| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c)  $(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B}) = (2 + 4i)(\overline{-4 + 2i}) = (2 + 4i)(-4 - 2i) = -8 - 4i - 16i + 8 = -20i$

d)  $|z_C - z_A| = |z_D - z_B| \Leftrightarrow AC = BD$

$(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B}) \text{ est imaginaire pur } \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

$z_B - z_A = 3 + i$

$z_C - z_D = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$

Donc  $z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow ABCD \text{ est un parallélogramme}$

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et isométriques donc est un carré.

$$\text{aire (ABCD)} = \frac{(2\sqrt{5})^2}{2} = 10 \text{ u. a}$$

## Exercice 2 :

De quoi s'agit t-il ?

\* Fonction en logarithme népérien

\* Fonction auxiliaire

\* Calcul d'aires

1) a)  $g$  est définie, continue et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x > 0$  on a  $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ .

$$g'(x) = 0 \text{ sig } \frac{2x^2-1}{x} = 0$$

$$\text{sig } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ car } x > 0$$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$	$+\infty$	$\frac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$	$+\infty$

b) D'après le tableau de variation de  $g$  on a :

$$\text{Pour tout } x > 0, g(x) > g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{2} > 0.$$

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $\mathcal{C}$ .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

La droite d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique à  $\mathcal{C}$  au voisinage de  $+\infty$ .

$$\text{c) } f \text{ est dérivable sur } ]0, +\infty[ \text{ et pour tout } x > 0, f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$

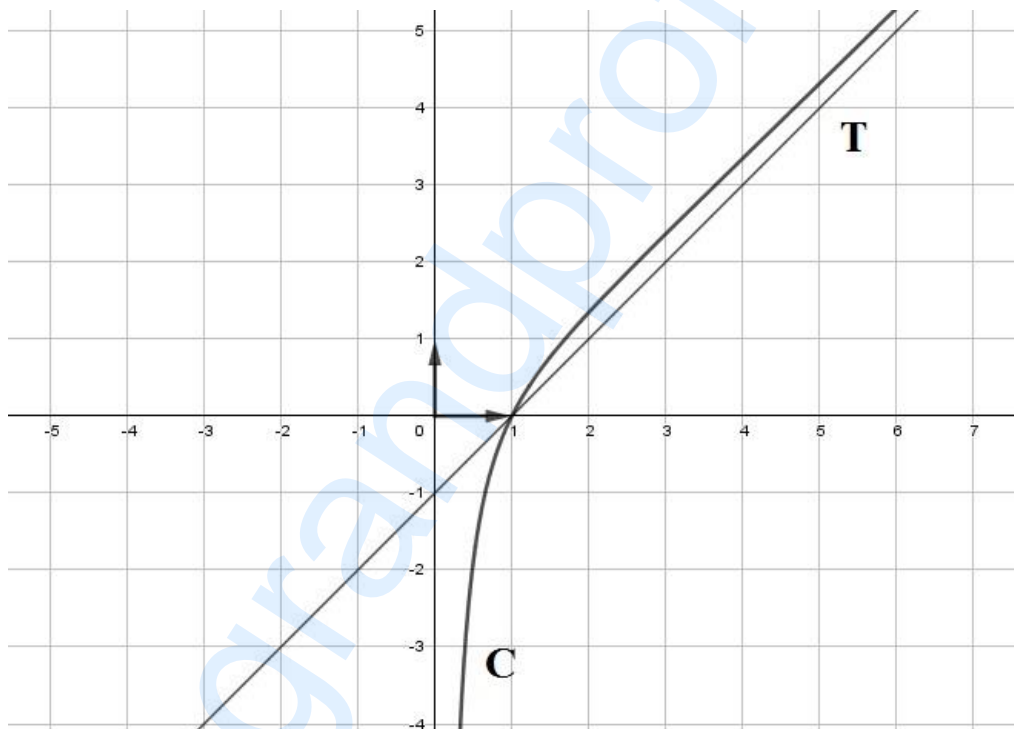
d) Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

e)  $f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x}$  et T :  $y = x - 1$ .

x	0	1	$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$		○	+
$f(x) - (x - 1)$		T/C	C/T

Représentation graphique :



$$3) \text{ aire} = \int_1^2 f(x) - (x - 1) dx \times 9 = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \times 9 = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^2 \times 9 = \frac{9}{2} (\ln 2)^2 \text{ cm}^2$$

**Exercice 3 :****De quoi s'agit-il ?**

- Matrices, déterminants et systèmes de trois équations à trois inconnues
- Lecture graphique
- Fonctions primitives et calcul d'aires

1)a)  $\det(A) = -4 \neq 0$  alors la matrice A est inversible.

b)  $A \times B = -4 I_3$  alors  $A^{-1} = -\frac{1}{4} B$

2) Par lecture graphique on a :

a)  $f(1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$ ,  $f(-1) = e$  et  $f'(-1) = -2e$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ .

3) a)  $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$  qui est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \text{et } f'(x) &= (-2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x}) \\ &= (-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))e^{-x} \end{aligned}$$

b)  $f(1) = (a + b + c)e^{-1} = 3e^{-1} \Rightarrow a + b + c = 3$

$f(-1) = (a - b + c)e = e \Rightarrow a - b + c = 1$

$f'(-1) = (-a - 2a + b + b - c)e = -2e \Rightarrow -3a + 2b - c = -2$

Par conséquent les réels a, b et c vérifient le système :

$$(S) \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 1 \\ -3a + 2b - c = -2 \end{cases}$$

c) (S)  $\Leftrightarrow A \times X = C$  avec  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et  $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

4)a)  $F(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \text{et } F'(x) &= (-2x - 3)e^{-x} + (-x^2 - 3x - 4)(-e^{-x}) \\ &= (-2x - 3 + x^2 + 3x + 4)e^{-x} \\ &= (x^2 + x + 1)e^{-x} = f(x) \end{aligned}$$

Donc F est une primitive de f sur IR.

$$\text{b) l'aire : } A = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{8}{e} + 4 = 4 - \frac{8}{e} \text{ u. a}$$

#### Exercice 4 :

De quoi s'agit-il ?

\* Division euclidienne,

\* congruences

1) a)

r	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de $2^r$ par 5	1	2	4	3	1
Le reste de la division euclidienne de $3^r$ par 5	1	3	4	2	1
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5	2	0	3	0	2

$$\text{b) } 2^4 \equiv 6 \equiv 1 [5] \text{ d'où pour tout entier } q, 2^{4q} \equiv 1 [5]$$

$$3^4 \equiv 1 [5] \text{ d'où pour tout entier } q, 3^{4q} \equiv 1 [5]$$

2) a) Les valeurs possibles de r sont : 0, 1, 2 ou 3.

$$\text{b) Si } k = 4n \text{ alors } 2^k + 3^k \equiv 2 [5]$$

$$\text{Si } k = 4n + 1 \text{ alors } 2^k + 3^k \equiv 0 [5]$$

$$\text{Si } k = 4n + 2 \text{ alors } 2^k + 3^k \equiv 3 [5]$$

$$\text{Si } k = 4n + 3 \text{ alors } 2^k + 3^k \equiv 0 [5]$$

3) a) Pour  $k \geq 1$ ,  $2^k$  est pair et  $3^k$  est impair puisque  $3 \equiv 1[2]$

donc  $3^k \equiv 1[2]$  par suite  $2^k + 3^k$  est impair.

b) Le chiffre des unités de  $2^k + 3^k$  est 3, 5 ou 7.

4) Le chiffre des unités de  $2^{2017} + 3^{2017}$  est 5.