# Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)

## Session principale 2018

**Exercice 1 :** (4points)

1) $z^2-(1+i)z+i=0$

$\Delta=(1+i)^2-4i=-2i=(1-i)^2$ donc $1-i$ est une racine carrée de $\Delta$.

$z_1=\frac{1+i+1-i}{2}=1 \quad z_2=\frac{1+i-1+i}{2}=i$ donc $S_{\mathbb{C}}=\{1,i\}$

Autrement :

$z_1=1$ est une solution apparente donc $z_1=1$ , $z_2=\frac{i}{1}$ est la deuxième solution

2)a) $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2+1=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0$

b) $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=(\sqrt{3}i)^2$ donc $\delta=i\sqrt{3}$ une racine carrée de $\Delta$

$z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

$z+\frac{1}{z}=i \Leftrightarrow z^2+1=iz \Leftrightarrow z^2-iz+1=0$

$\Delta=(-i)^2-4=-5=(i\sqrt{5})^2$ donc $\delta=i\sqrt{5}$ une racine carrée de $\Delta$

$z_1=\frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \quad ; \quad z_2=\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{i(1-\sqrt{5})}{2},\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}\right\}$

3)a) $(z+\frac{1}{z})^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i=z^2+\frac{1}{z^2}+2-(1+i)z-\left(\frac{1+i}{z}\right)+i$

$$=\frac{z^4+1+2z^2-(1+i)z^3-(1+i)z+iz^2}{z^2}$$

$$=\frac{z^4-(1+i)z^3+(2+i)z^2-(1+i)z+1}{z^2}=\frac{p(z)}{z^2}$$

b) $p(z)=0 , z=0$

$\frac{p(z)}{z^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i=0$

On pose $Z=z+\frac{1}{z}$ ; $p(z)=0 \Leftrightarrow Z^2-(1+i)Z+i=0$ et $Z=z+\frac{1}{z}$

$\Leftrightarrow Z=1$ ou $Z=i$ et $Z=z+\frac{1}{z} \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=1$ ou $z+\frac{1}{z}=i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i$ ou $z=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i\right\}$

**Exercice 2 :** (4 points)

1) $A^2=AxA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$

2) a) $*)(4I_3-A)xB=(4I_3-A)(I_3+A)=4I_3+4A-A-A^2=4I_3+3A-3A+4I_3=4I_3$

$*)\ Bx(4I_3-A)=(I_3+A)(4I_3-A)=4I_3-A+4A-A^2=4I_3+3A-3A=4I_3$

b) On $Bx(4I_3-A)=4I_3 \Leftrightarrow Bx\left(\frac{4I_3-A}{4}\right)=I_3 \Leftrightarrow Bx\left(I_3-\frac{1}{4}A\right)=I_3$

donc B est inversible et $B^{-1}=I_3-\frac{1}{4}A$

3)a)(s) : $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=-1 \\ x+y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2&1&1 \\ 1&2&1 \\ 1&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{B}x\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ et $y = \frac{-7}{4}$ et $z = \frac{1}{4}$

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

**Exercice 3 :** (6 points)

1)a) $U_{n+1} = x_{n+1} - 1 = 3x_n - 2 - 1 = 3(x_n - 1) = 3U_n$

$(U_n)$ est une suite géométrique de raison q=3 et 1er terme $U_0 = x_0 - 1 = 4$

b)$U_n = x_n - 1$ donc $x_n = U_n + 1 = 4x3^n + 1$

2)a) soit d=pgcd$(x_n, x_{n+1})$ donc d divise $x_n$ et $x_{n+1}$ donc d divise $3x_n - x_{n+1}$ donc d divise 2

b)pgcd$(x_n, x_{n+1})$ divise 2 donc pgcd$(x_n, x_{n+1}) \in \{1,2\}$ Or $x_n = 4x3^n + 1$ est impair donc pgcd$(x_n, x_{n+1}) = 1$

3)a) pour $n = 0$ ; $5x_0 - 4y_0 = 21$

Soit n$\in \mathbb{N}$ , supposons que $5x_n - 4y_n = 21$

Montrons que $5x_{n+1} - 4y_{n+1} = 21$

$5x_{n+1} - 4y_{n+1} = 5(3x_n - 2) - 4(3y_n + 8) = 15x_n - 10 - 12y_n - 32$

$= 3(5x_n - 4y_n) - 42 = 3x21 - 42 = 21$

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$ $5x_n - 4y_n = 21$

b)On a $5x_n - 4y_n = 21$ donc $4y_n = 5x_n - 21$ donc $4y_n = 5(4x3^n + 1) - 21$ donc $y_n = 5x3^n - 4$

c)Soit d'=pgcd$(x_n, y_n)$ donc d' divise $x_n$ et $y_n$ d' divise $5x_n - 4y_n$ donc d' divise 21

d' $\in \{1,3,7,21\}$

4)a)le reste de la division euclidienne de $3^n$ par 7 est

1 si $n \equiv 0[6]$

3 si $n \equiv 1[6]$

2 si $n \equiv 2[6]$

6 si $n \equiv 3[6]$

4 si $n \equiv 4[6]$

5 si $n \equiv 5[6]$

b) si $n \equiv 5[6]$ alors $3^n \equiv 5[7]$ donc $4x3^n \equiv 6[7]$ donc $4x3^n + 1 \equiv 0[7]$donc $x_n \equiv 0[7]$

si $n \equiv 5[6]$ alors $4x3^n \equiv 6[7]$ donc $5x3^n - 4 \equiv 0[7]$ donc $y_n \equiv 0[7]$

D'où pgcd$(x_n, y_n) \in \{7,21\}$ or $x_n$ et $y_n$ ne sont pas divisibles par 3 donc pgcd $(x_n, y_n) = 7$

c)2018≡2[6] car 2018 = 6x336 + 2 alors $4x3^{2018} + 1 \equiv 4x2 + 1[7]$

donc $4x3^{2018} + 1 \equiv 2[7]$ donc $x_{2018} \equiv 2[7]$ donc $x_{2018}$ n'est pas divisible par 7

$4x3^{2018} + 1 \equiv 1[3]$ et $x_{2018} = 4x3^{2018} + 1$ donc $x_{2018}$ n'est pas divisible par 3

donc pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) \notin \{3,7,21\}$ or pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) \in \{1,3,7,21\}$

donc pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) = 1$

**Exercice 4 :** (6 points)

1) a) $f_n'(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}$ donc $f_n'(x) \succ 0$ pour tout réel x

$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ |

b) $f(0) = e^{-\frac{0}{n}} = 1$ donc $C_n$ passe par J(0,1)

c) $n+1 \succ n$ donc $\frac{1}{n} \succ \frac{1}{n+1}$ donc $-\frac{1}{n} \prec -\frac{1}{n+1}$

donc si $x \in [0,+\infty[$ alors $-\frac{x}{n} \prec -\frac{x}{n+1}$ et $f_n(x) \prec f_{n+1}(x)$ et $C_n$ est au dessous de $C_{n+1}$

donc si $x \in ]-\infty,0]$ alors $-\frac{x}{n} \succ -\frac{x}{n+1}$ et $f_n(x) \succ f_{n+1}(x)$ et $C_n$ est au dessus de $C_{n+1}$

La courbe tracée en trait interrompu celle de $C_3$

La courbe tracée en trait continu celle de $C_1$

3) a) $g_n'(x) = -\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} - 1$ pour tout réel positif x donc $g_n'(x) \prec 0$

$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{n}} - x = \lim_{x\to-\infty} x(-\frac{1}{n}\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{(-\frac{x}{n})} - 1) = +\infty$

| x | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g_n'(x)$ | $-$ |
| $g_n(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ $-\infty$ |

b) D'après la question précédente $g_n$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique, soit $x_n$ cette solution. $g_n(0) = 1$ et $g_n(1) = e^{-\frac{1}{n}} - 1$ or $-\frac{1}{n} \prec 0$ donc $e^{-\frac{1}{n}} \prec 1$ donc $g_n(0) x g_n(1) \prec 0$ et par suite $x_n \in ]0,1[$.

c) $g_n(x_n) = 0$ donc $f_n(x_n) = x_n$ donc $x_n$ est l'abscisse du point d'intersection de la courbe $C_n$ et la droite $\Delta$ : y=x

d) voir figure.

4)a) $g_{n+1}(x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-x_n-(e^{-\frac{x_n}{n}}-x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-x_n-e^{-\frac{x_n}{n}}+x_n=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}$

b) $\frac{x_n}{n+1}\prec\frac{x_n}{n}$ donc $-\frac{x_n}{n+1}\succ-\frac{x_n}{n}$ donc $e^{-\frac{x_n}{n+1}}\succ e^{-\frac{x_n}{n}}$ donc $e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}\succ 0$

or $g_{n+1}(x_{n+1})=0$ et $g_{n+1}(x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}$ donc $g_{n+1}(x_n)>g_{n+1}(x_{n+1})$

or $g_n$ est strictement décroissante donc $x_n<x_{n+1}$ donc $(x_n)$ est croissante

c) $(x_n)$ est croisssante et majorée par 1 donc $(x_n)$ est convergente, soit α cette limite

0< $x_n<1$ donc $0<\frac{x_n}{n}<\frac{1}{n}$ donc $-\frac{1}{n}<-\frac{x_n}{n}<0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x_n}{n}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x_n}{n}}=1$

or $g_n(x_n)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x_n)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x_n}{n}}-x_n=1$ donc α=1