

# MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques

Session de contrôle : juin 2015

## Exercice 1 (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de  $f$  est  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BO}) \equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BD})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

$$\text{Le rapport de } f \text{ est } \frac{OB}{AI} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

b)  $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2}$  et  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ , il en résulte que  $D$  est le centre de  $f$ .

2) a)  $[AC]$  est un diamètre de  $(\zeta)$  et  $E \in (\zeta) \setminus \{A, C\}$  donc  $(CE) \perp (AE)$  et  $(BH) \perp (AE)$  donc  $(BH) \parallel (CE)$ , or  $(CE)$  passe par  $J$  le milieu de  $[AB]$  et coupe  $[AH]$  en  $E$ , il en résulte que  $E$  est le milieu de  $[AH]$ .

$$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EH} = -EA \times EH = -EA^2.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = EA \cdot EB \cdot \cos(\angle AEB) = EA \cdot EB \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB.$$

$$\text{car } (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) \equiv \pi + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

3) a) Le rapport de  $g$  est  $\frac{EA}{EB} = \frac{EH}{\sqrt{2}EH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

b) Le triangle  $OEB$  est isocèle donc son image par  $g$  est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle  $O'EA$  est isocèle.

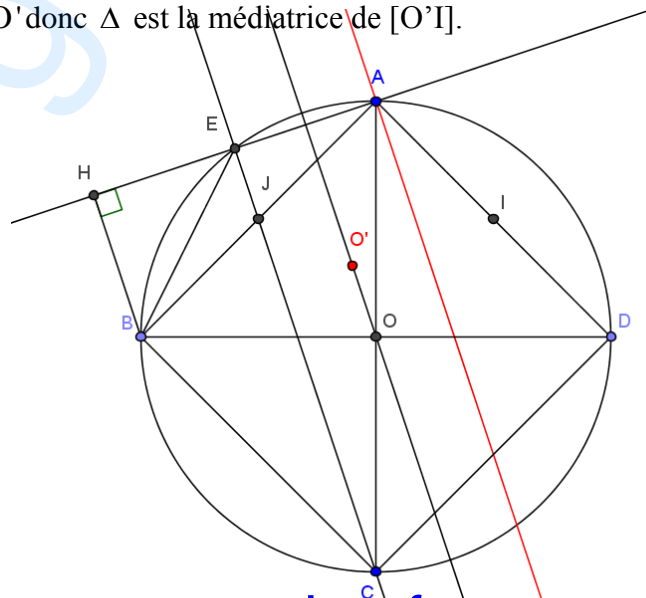
c) On sait que  $f(A) = B$  et  $f(I) = O$  donc  $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$  de plus

$$g(B) = A \text{ et } g(O) = O' \text{ donc } AO' = \frac{1}{\sqrt{2}}OB, \text{ il en résulte que } O'A = AI.$$

4)  $S$  est la composée d'une similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$  est d'une similitude indirecte de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  donc

$S$  est une similitude indirecte de rapport 1 donc  $S$  est un antidéplacement.

$S(A) = g(f(A)) = g(B) = A$ , il en résulte que  $S$  est une symétrie orthogonale d'axe  $\Delta$  qui passe par  $O$  de plus  $S(I) = g(f(I)) = g(O) = O'$  donc  $\Delta$  est la médiatrice de  $[O'I]$ .



**Exercice 2 ( Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace )**

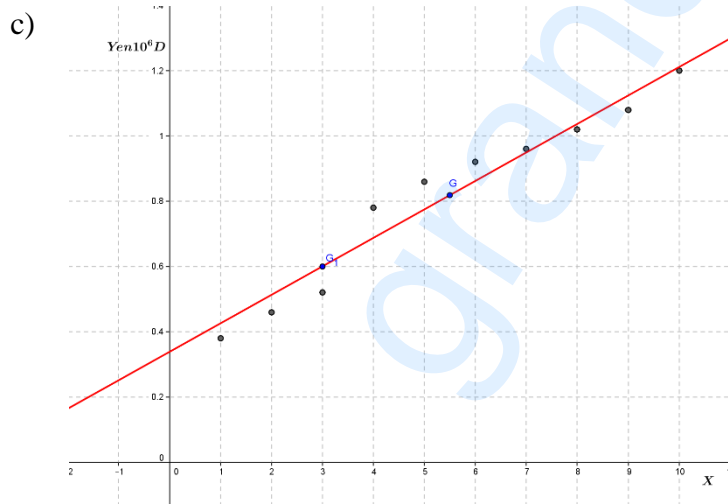
- 1) a)  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$ , on en déduit que S est la sphère de centre I(0,3,2) et de rayon 2.  
 b) Il suffit de vérifier que  $A \in S$ ,  $B \in S$  et I est le milieu de [AB].
- 2) a) La cote du point I est 2 donc  $I \in P$  par suite S coupe P suivant le cercle  $\Gamma$  de centre I et de rayon 2, or A et B appartiennent à P et I est le milieu de [AB]. donc [AB] est un diamètre de  $\Gamma$ .  
 b)  $IA = 2$ ,  $JA = 4$  et  $IJ = 6$  donc  $IA + JA = IJ$  par suite  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont tangents extérieurement en A.
- 3) a) Le rayon de  $S'$  est égal à  $\frac{5}{2} \times 2 = 5$ . On pose  $I'(x, y, z)$ ,  

$$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'} = \frac{5}{2} \overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = -10 \\ y-3 = 0 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}$$
, il en résulte que  $I'(-6, 3, 5)$ .  
 b)  $d(I', P) = 3 < 5$  donc  $S'$  coupe P suivant un cercle de rayon  $\sqrt{25-9} = 4$  et de centre le projeté orthogonal de  $I'$  sur P, or J est un point de P et  $\overrightarrow{I'J} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  est normal à P donc J est le projeté orthogonal de  $I'$  sur P, il en résulte que P coupe  $S'$  suivant le cercle  $\Gamma'$ .  
 c)  $A \in S \cap (EA)$  donc  $h(A) \in S' \cap (EA) = \{A, A'\}$  or  $h(A) \neq A$  donc  $h(A) = A'$ .  
 B est le point diamétralement opposé à A sur S donc  $h(B)$  est le point diamétralement opposé à  $A'$  sur  $S'$ , on en déduit que  $h(B) = B'$  par suite E, B et  $B'$  sont alignés.

**Exercice 3 ( Thème : statistique à deux variables)**

- 1) a)  $G(\overline{X}, \overline{Y})$  donc  $G(5.5, 0.818)$ .

b)  $G_1(3, 0.6)$ .



d)  $a = \frac{0.6 - 0.818}{3 - 5.5} = 0.09$  donc  $(GG_1): y = 0.0872x + b$  or  $G_1 \in (GG_1)$

donc  $0.6 = 0.09 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 0.33$ , il en résulte que  $(GG_1): y = 0.09x + 0.33$ .

e) Pour  $x = 16$ , on obtient  $y = 1.77$ .

2) a)  $r = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = 0.987$ .

b)  $Z = bX + a$  avec  $b = \frac{\text{cov}(X,Z)}{\sigma_X^2} = 0.2$  et  $a = \bar{Z} - b\bar{X} = 1.23$ . Ainsi  $Z = 0.2X + 1.23$

c)  $Z = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow e^Y = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow Y = \ln(0.2X + 1.23)$ . Pour  $x = 16$ , on obtient  $y = 1.488399584$ .

**Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)**

I. 1) a) Pour tout  $t > 0$ ,  $u'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{2+3t}{(1+t)^2} > 0$ .

x	0	$+\infty$
$u'(t)$		+
u	0	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3 \ln(1+t) - \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = +\infty.$$

b)  $u(]0, +\infty[) = ]0, +\infty[$  donc  $u(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ .

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0 = f(0)$  donc  $f$  est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x = 0 = f'_d(0)$$
 donc  $f$  est dérivable à droite en 0.

b) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'(x) = 3x^2 [\ln(1+x) - \ln x] + x^3 \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right]$

$$= x^2 \left[ 3 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = x^2 u \left( \frac{1}{x} \right).$$

c) On a  $u(x) > 0$  pour tout  $x > 0$  donc  $u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$  pour tout  $x \in ]0, 1]$  d'où  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, 1]$

x	0	1
$f'(x)$	0	+
f	0	$\rightarrow \ln 2$

II. 1) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2 (3 \ln x + 1)$ .

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$ . On en déduit que  $(C_h)$  admet une tangente

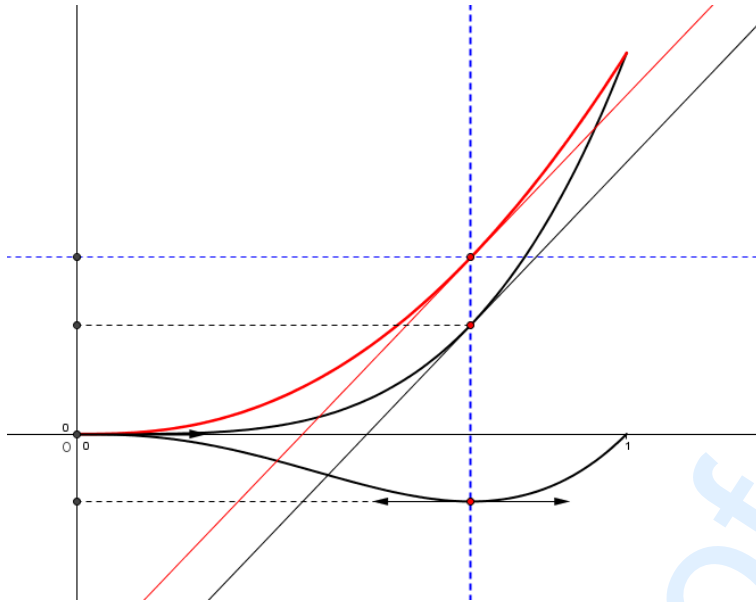
horizontale au point d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$ .

2) a) Pour tout  $x \in ]0,1]$ ,  $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$  et  $f(0) = g(0) - h(0)$  donc pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $f(x) = g(x) - h(x)$ .

b) Pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$  donc  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  et les points  $(0,0)$  et  $(1, \ln 2)$  sont des points d'intersection.

c)  $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$  donc  $T \perp T'$ .

3)



4) a) La fonction  $h$  est continue sur  $[0,1]$  donc elle admet une unique primitive  $H$  qui s'annule en 1.

b)  $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$ .

c) On pose 
$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$$

$$A(\alpha) = \left[ \frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} [x^4]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \alpha^4.$$

d)  $H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -A(\alpha) = \frac{1}{16}$ .

e)  $A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 h(x) dx = H(0) = \frac{1}{16}$ .